

CHAPITRE

9

Projection orthogonale

9 Projection orthogonale

9.1 Projection d'un point sur une droite

Exercice 9.1.1

Soit ABC un triangle, M un point de coordonnées barycentriques $\{x, y, 1 - x - y\}$. Déterminer les coordonnées barycentriques du projeté orthogonal P de M sur la droite (AB) , calculer alors la distance minimale MP^2 .

Reformuler les réponses lorsque les coordonnées barycentriques de M sont $\{X, Y, Z\}$.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M, P\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, P .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M = \{x, y, 1 - x - y\}$$

$$P = \{k, 1 - k, 0\}$$

La distance MP^2 est égale à

$$MP^2 = AB^2 (k - x) (-1 + k + y) - AC^2 (k - x) (-1 + x + y) + BC^2 (-1 + k + y) (-1 + x + y)$$

soit

$$MP^2 = a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2 + k (-a^2 + b^2 - c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y) + c^2 k^2$$

La recherche du projeté du point M sur la droite (AB) correspond à un extremum de la quantité MP^2 . La dérivée de MP^2 par rapport à k est

$$\frac{dMP^2}{dk} = (-a^2 + b^2 - c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y) + 2c^2 k$$

qui s'annule pour

$$k = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - a^2 x + b^2 x + c^2 x - a^2 y + b^2 y - c^2 y}{2c^2}$$

Lorsque $M = \{x, y, 1 - x - y\}$, on obtient donc les coordonnées barycentriques de P

$$M = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2 - a^2 x + b^2 x + c^2 x - a^2 y + b^2 y - c^2 y}{2c^2}, \right. \\ \left. \frac{(-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y)}{2c^2}, 0 \right\}$$

La distance MP^2 devient alors

$$MP^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + x + y)^2}{4c^2}$$

Pour $M = \{X, Y, Z\}$, on remplace x par $\frac{X}{X+Y+Z}$, y par $\frac{Y}{X+Y+Z}$ et on obtient les coordonnées barycentriques de P

$$M = \left\{ \frac{2c^2 X + a^2 Z - b^2 Z + c^2 Z}{2c^2(X+Y+Z)}, \frac{2c^2 Y - a^2 Z + b^2 Z + c^2 Z}{2c^2(X+Y+Z)}, 0 \right\}$$

La distance MP^2 devient alors

$$MP^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)Z^2}{4c^2(X+Y+Z)^2}$$

9.2 Formules diverses invoquant des projections

Exercice 9.2.1

Dans un triangle ABC , soient J_a, J_b, J_c le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté (BC) (resp. (AC) , (AB)), J le centre du cercle ex-inscrit, r_a, r_b, r_c, r les rayons respectifs de ces cercles et $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle, K son centre. Montrer que

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = p^2$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

Solution:

Les coordonnées barycentriques des points introduits dans l'énoncé sont classiques, leur descriptif n'est pas inséré dans la solution.

La projection du point J sur la droite (BC) est le point P de coordonnées barycentriques

$$P = \left\{ 0, \frac{a + b - c}{2a}, \frac{a - b + c}{2a} \right\}$$

On a donc

$$r^2 = JP^2 = \frac{(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}{4(a + b + c)}$$

La projection du point J_a sur la droite (BC) est le point P_a de coordonnées barycentriques

$$P_a = \left\{0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a}\right\}$$

On a donc

$$r_a^2 = J_a P_a^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(-a+b+c)}$$

La projection du point J_b sur la droite (BC) est le point P_b de coordonnées barycentriques

$$P_b = \left\{0, \frac{a-b-c}{2a}, \frac{a+b+c}{2a}\right\}$$

On a donc

$$r_b^2 = J_b P_b^2 = \frac{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4(a-b+c)}$$

La projection du point J_c sur la droite (BC) est le point P_c de coordonnées barycentriques

$$P_c = \left\{0, \frac{a+b+c}{2a}, \frac{a-b-c}{2a}\right\}$$

On a donc

$$r_c^2 = J_c P_c^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(a+b-c)}$$

La distance $KA^2 = R^2$ est égale à

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

On a successivement

$$r_a^2 r_b^2 = \frac{(a+b-c)(-a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)^2}{16(a-b-c)}$$

$$r_a r_b = \frac{1}{4}(a+b-c)(a+b+c)$$

Et

$$r_a^2 r_c^2 = \frac{(a-b+c)^2 (a+b+c)^2}{16}$$

$$r_a r_c = \frac{1}{4}(a-b+c)(a+b+c)$$

Et

$$r_b^2 r_c^2 = \frac{(a-b-c)(-a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)^2}{16(a+b-c)}$$

$$r_b r_c = \frac{1}{4}(-a+b+c)(a+b+c)$$

Ainsi

$$r^2 r_a^2 r_b^2 r_c^2 = \frac{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2}{256}$$

donc

$$r r_a r_b r_c = \frac{1}{16} (a + b - c) (a - b + c) (-a + b + c) (a + b + c)$$

Le calcul fournit alors

$$\begin{aligned} r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c &= \frac{1}{4} (a + b + c)^2 = p^2 \\ r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c - \frac{r r_a r_b r_c}{r^2} &= 0 \end{aligned}$$

identique à la seconde formule.

On obtient également, en développant

$$(r_a + r_b + r_c)^2 = \frac{(a + b + c) (a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2)^2}{4 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c)}$$

et le calcul à l'ordinateur donne

$$(r_a + r_b + r_c)^2 - (r^2 + 16R^2) = \frac{4abc}{a + b + c}$$

Puisque

$$r^2 R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4(a + b + c)^2}$$

soit

$$r R = \frac{4abc}{a + b + c}$$

il résulte la troisième formule.

Exercice 9.2.2

Soit ABC un triangle et K le centre du cercle circonscrit, R le rayon de ce cercle. On désigne par K_a (resp. K_b, K_c) la projection orthogonale de K sur le côté BC (resp. AC, AB), par J le centre du cercle inscrit, r le rayon de ce cercle.

Montrer que $2Rr(a + b + c) = abc$ et que

$$KK_a + KK_b + KK_c = R + r$$

Solution:

Soit J_1 la projection orthogonale de J sur le côté BC , donc $r^2 = JJ_1^2$. La projection J_1 du point J de coordonnées $\{a, b, c\}$ sur la droite $\{B, C\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$\left\{0, \frac{a + b - c}{2a}, \frac{a - b + c}{2a}\right\}$$

Les points K_a, K_b, K_c sont les milieux respectifs des segments BC, AC, AB et $R^2 = AK^2$.

Dessin = $\{A, B, C, J, J_1, K, K_a, K_b, K_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_a, K_b, K_c, J_1, J, K .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

$$K_a = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$K_b = \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

$$K_c = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\}$$

$$J = \left\{ \frac{a}{a + b + c}, \frac{b}{a + b + c}, \frac{c}{a + b + c} \right\}$$

$$J_1 = \left\{ 0, \frac{a + b - c}{2a}, \frac{a - b + c}{2a} \right\}$$

La distance JJ_1^2 est égale à

$$JJ_1^2 = \frac{AB^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2(a + b + c)^2} + \frac{AC^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2(a + b + c)^2} - \frac{BC^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$JJ_1^2 = \frac{(a + b - c) (a - b + c) (-a + b + c)}{4(a + b + c)}$$

La distance KK_a^2 est égale à

$$KK_a^2 = \frac{a^2 AB^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{a^2 AC^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ - \frac{BC^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{4(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$KK_a^2 = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

La distance KK_b^2 est égale à

$$KK_b^2 = \frac{AB^2 b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AC^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{b^2 BC^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{2(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$KK_b^2 = \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2}{4(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}$$

La distance KK_c^2 est égale à

$$KK_c^2 = \frac{BC^2 c^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)^2}{2(-a + b + c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AC^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AB^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{4(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$KK_c^2 = \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Le produit $4R^2 r^2 (a + b + c)^2 = 4AK^2 JJ_1^2 (a + b + c)^2$ a pour valeur

$$4 \frac{a^2 b^2 c^2}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \frac{(-a - b + c)(a - b + c)(-a + b + c)}{4(a + b + c)} (a + b + c)^2 = a^2 b^2 c^2$$

En posant

$$K = \frac{1}{2\sqrt{(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}}$$

on a :

$$KK_a = Ka (-a^2 + b^2 + c^2) \\ KK_b = Kb (a^2 - b^2 + c^2) \\ KK_c = Kc (a^2 + b^2 - c^2)$$

donc

$$KK_a + KK_b + KK_c = K(-a^3 + a^2 b + a b^2 - b^3 + a^2 c + b^2 c + a c^2 + b c^2 - c^3)$$

Puisque $R = K 2abc$, on obtient

$$r = K(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = K(-a^3 + a^2 b + a b^2 - b^3 + a^2 c - 2abc + b^2 c + a c^2 + b c^2 - c^3)$$

donc

$$R + r = K(-a^3 + a^2 b + a b^2 - b^3 + a^2 c + b^2 c + a c^2 + b c^2 - c^3)$$

9.3 Théorème de Steiner

Exercice 9.3.1 relation entre les rayons des cercles

Soit ABC un triangle et

R = le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC
 r = le rayon du cercle inscrit au triangle ABC
 r_a = le rayon du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à BC
 r_b = le rayon du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AC
 r_c = le rayon du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AB

Montrer que

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$

Solution:

Soit K le centre du cercle circonscrit, J le centre du cercle inscrit au triangle ABC , J_a le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à BC , J_b le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AC , J_c le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AB .

Dessin = $\{A, B, C, J, J_a, J_b, J_c, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont J, J_a, J_b, J_c, K .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

$$J_a = \left\{ \frac{a}{a-b-c}, \frac{b}{-a+b+c}, -\frac{c}{a-b-c} \right\}$$

$$J_b = \left\{ \frac{a}{a-b+c}, \frac{b}{-a+b-c}, \frac{c}{a-b+c} \right\}$$

$$J_c = \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, -\frac{c}{a+b-c} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P, P_a, P_b, P_c\} = \{A, B, C, J, J_a, J_b, J_c, K, P, P_a, P_b, P_c\}$

Les points composés sont P, P_a, P_b, P_c .

La projection du point J de coordonnées $\{a, b, c\}$ sur la droite $\{B, C\}$ est le point P de coordonnées barycentriques

$$P = \left\{ 0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a-b+c}{2a} \right\}$$

La projection du point J_a de coordonnées $\{-a, b, c\}$ sur la droite $\{B, C\}$ est le point P_a de coordonnées barycentriques

$$P_a = \left\{0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a}\right\}$$

La projection du point J_b de coordonnées $\{a, -b, c\}$ sur la droite $\{A, C\}$ est le point P_b de coordonnées barycentriques

$$P_b = \left\{\frac{-a+b+c}{2b}, 0, \frac{a+b-c}{2b}\right\}$$

La projection du point J_c de coordonnées $\{a, b, -c\}$ sur la droite $\{A, B\}$ est le point P_c de coordonnées barycentriques

$$P_c = \left\{\frac{-a+b+c}{2c}, \frac{a-b+c}{2c}, 0\right\}$$

La distance r^2 est égale à

$$r^2 = JP^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4(a+b+c)}$$

La distance r_a^2 est égale à

$$r_a^2 = J_a P_a^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(-a+b+c)}$$

La distance r_b^2 est égale à

$$r_b^2 = J_b P_b^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{4(a-b+c)}$$

La distance r_c^2 est égale à

$$r_c^2 = J_c P_c^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(a+b-c)}$$

La distance R^2 est égale à

$$R^2 = KA^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

On a donc, en posant

$$\lambda = \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

les relations

$$\begin{aligned} r &= \frac{\lambda}{2(a+b+c)} \\ r_a &= \frac{\lambda}{2(-a+b+c)} \\ r_b &= \frac{\lambda}{2(a-b+c)} \\ r_c &= \frac{\lambda}{2(a+b-c)} \\ R &= \frac{abc}{\lambda} \end{aligned}$$

donc

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{4abc\lambda}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} = 4R$$

9.4 Droites concourantes passant par des points classiques

Exercice 9.4.1

Soit un triangle ABC

Δ_1 la droite joignant les pieds H_b et H_c des hauteurs issues de B et C

Δ_2 la droite joignant les points de contact K_b et K_c du cercle inscrit avec (AB) et (AC)

Δ_3 la droite joignant les pieds J_b et J_c des bissectrices intérieures issues de B et C

Montrer que les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont concourantes ou parallèles.

Solution:

Soit J le centre du cercle inscrit.

Dessin = $\{A, B, C, H_b, H_c, J, J_b, J_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont H_b, H_c, J_b, J_c, J .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$H_b = \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}, 0, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b^2} \right\}$$

$$H_c = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2}, 0 \right\}$$

$$J_b = \left\{ \frac{a}{a+c}, 0, \frac{c}{a+c} \right\}$$

$$J_c = \left\{ \frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}, 0 \right\}$$

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{K_b, K_c\} = \{A, B, C, H_b, H_c, J, J_b, J_c, K_b, K_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_b, K_c .

La projection du point J sur la droite $\{A, B\}$ est le point K_c de coordonnées barycentriques

$$K_c = \left\{ \frac{a-b+c}{2c}, \frac{-a+b+c}{2c}, 0 \right\}$$

La projection du point J sur la droite $\{A, C\}$ est le point K_b de coordonnées barycentriques

$$K_b = \left\{ \frac{a+b-c}{2b}, 0, \frac{-a+b+c}{2b} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_1\} = \{A, B, C, H_b, H_c, I_1, J, J_b, J_c, K_b, K_c\}$

Détermination du point I_1 :

Soit I_1 le point $(H_b H_c) \cap (K_b K_c) = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Le point I_1 est composé.

Comme $I_1 \in (H_b H_c)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OI_1} = \nu_1 \overrightarrow{OH_b} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OH_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a^2 b^2 - b^4 + b^2 c^2 - a^2 b^2 \nu_1 + b^4 \nu_1 + a^2 c^2 \nu_1 - c^4 \nu_1}{2 b^2 c^2}$$

$$a(2) = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) (1 - \nu_1)}{2 c^2}$$

$$a(3) = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \nu_1}{2 b^2}$$

Comme $I_1 \in (K_b K_c)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OI_1} = \mu_1 \overrightarrow{OK_b} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{a b - b^2 + b c - a b \mu_1 + b^2 \mu_1 + a c \mu_1 - c^2 \mu_1}{2 b c}$$

$$b(2) = \frac{(-a + b + c) (1 - \mu_1)}{2 c}$$

$$b(3) = \frac{(-a + b + c) \mu_1}{2 b}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(a - b) b (a + b - c)}{(b - c) (a^2 - b^2 - c^2)} \quad \mu_1 = \frac{(a - b) (a + b - c)}{(a - b - c) (b - c)}$$

On déduit que:

$$I_1 = \left\{ \frac{a (-a + b + c)}{2 b c}, \frac{(a - c) (a - b + c)}{2 c (b - c)}, \frac{(-a + b) (a + b - c)}{2 b (b - c)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_2\} = \{A, B, C, H_b, H_c, I_1, I_2, J, J_b, J_c, K_b, K_c\}$

Détermination du point I_2 :

Soit I_2 le point $(J_b J_c) \cap (K_b K_c) = \Delta_3 \cap \Delta_2$. Le point I_2 est composé.

Comme $I_2 \in (J_b J_c)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OI_2} = \nu_1 \overrightarrow{OJ_b} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OJ_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{a(a+c+b\nu_1-c\nu_1)}{(a+b)(a+c)}$$

$$c(2) = \frac{b(1-\nu_1)}{a+b}$$

$$c(3) = \frac{c\nu_1}{a+c}$$

Comme $I_2 \in (K_bK_c)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OI_2} = \mu_1 \overrightarrow{OK_b} + (1-\mu_1) \overrightarrow{OK_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{ab - b^2 + bc - ab\mu_1 + b^2\mu_1 + ac\mu_1 - c^2\mu_1}{2bc}$$

$$d(2) = \frac{(-a+b+c)(1-\mu_1)}{2c}$$

$$d(3) = \frac{(-a+b+c)\mu_1}{2b}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(-a+b)(a+b-c)(a+c)}{2b(b-c)c} \quad \mu_1 = \frac{(a-b)(a+b-c)}{(a-b-c)(b-c)}$$

On déduit que:

$$I_2 = \left\{ \frac{a(-a+b+c)}{2bc}, \frac{(a-c)(a-b+c)}{2c(b-c)}, \frac{(-a+b)(a+b-c)}{2b(b-c)} \right\}$$

On a effectivement $I_1 = I_2$, le parallélisme ayant lieu lorsque $b = c$.

9.5 Triangle podaire d'un point relativement à un triangle

Soit ABC un triangle et M un point du plan. Les projections orthogonales du point M sur chaque côté du triangle déterminent trois points: le triangle formé par ces trois points est appelé le triangle podaire de M (relativement au triangle ABC).

Exercice 9.5.1

Soit ABC un triangle et B_0 et B_1 les points de coordonnées barycentriques

$$B_0 = \left\{ \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right\}$$

(appelés points de Brocard). Montrer que les triangles podaires des points B_0 et B_1 relativement au triangle ABC sont semblables au triangle ABC .

Solution:

Soient H_a, H_b, H_c (resp. K_a, K_b, K_c) les projetés orthogonaux respectifs de B_0 (resp. B_1) sur les côtés $(BC), (AC), (AB)$ du triangle. Le triangle $H_a H_b H_c$ (resp. $K_a K_b K_c$) est le triangle podaire de B_0 (resp. B_1) relativement au triangle ABC .

Dessin = $\{A, B, C, B_0, B_1, H_a, H_b, H_c, K_a, K_b, K_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont B_0, B_1 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

La projection du point B_0 sur la droite $\{B, C\}$ est le point H_a de coordonnées barycentriques

$$\left\{ 0, \frac{b^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{a^2 b^2 - b^4 + 2 a^2 c^2 + b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_0 sur la droite $\{A, C\}$ est le point H_b de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{2 a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0, \frac{c^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_0 sur la droite $\{A, B\}$ est le point H_c de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{a^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0 \right\}$$

La projection du point B_1 sur la droite $\{B, C\}$ est le point K_a de coordonnées barycentriques

$$\left\{ 0, \frac{2 a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_1 sur la droite $\{A, C\}$ est le point K_b de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{a^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0, \frac{-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_1 sur la droite $\{A, B\}$ est le point K_c de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{a^2 b^2 - b^4 + 2 a^2 c^2 + b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{b^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0 \right\}$$

Soit $K > 0$ la constante définie par

$$K^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}{4(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}$$

On a directement $H_a H_b^2 = K^2 b^2$, $K_a K_b^2 = K^2 a^2$, $H_b H_c^2 = K^2 c^2$, $K_b K_c^2 = K^2 b^2$, $H_a H_c^2 = K^2 a^2$, $K_a K_c^2 = K^2 c^2$. Les côtés de chaque triangle ont des longueurs proportionnelles aux réels a, b, c , donc les trois triangles mentionnés sont semblables.

9.6 Formule de Pappus

Exercice 9.6.1

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle et M un point de ce cercle. Montrer que le produit des distances du point M à deux côtés non-consécutifs du quadrilatère est égal au produit des distances du point M aux deux autres côtés non-consécutifs de ce quadrilatère.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, M\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, M .

Avec des notations naturelles, on a

$$D = \left\{ x, y, -\frac{c^2 xy}{b^2 x + a^2 y} \right\}$$

$$M = \left\{ x_1, y_1, -\frac{c^2 x_1 y_1}{b^2 x_1 + a^2 y_1} \right\}$$

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$D = \left\{ \frac{x(b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2}, \frac{y(b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2}, \frac{-c^2 xy}{b^2 x^2 + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2} \right\}$$

$$M = \left\{ \frac{x_1(b^2 x_1 + a^2 y_1)}{b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2}, \frac{y_1(b^2 x_1 + a^2 y_1)}{b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2}, \frac{-c^2 x_1 y_1}{b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2} \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite $\{A, B\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$M_1 = \left\{ \frac{x_1(2b^2 x_1 + a^2 y_1 + b^2 y_1 - c^2 y_1)}{2(b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \frac{y_1(a^2 x_1 + b^2 x_1 - c^2 x_1 + 2a^2 y_1)}{2(b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, 0 \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite $\{C, D\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$M_2 = \left\{ \frac{x (b^2 x_1 + a^2 y_1) (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{y (b^2 x_1 + a^2 y_1) (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{NumZ(M_2)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)} \right\}$$

avec

$$NumZ(M_2) = a^2 b^2 x x_1^2 y - b^4 x x_1^2 y - b^2 c^2 x x_1^2 y + a^2 b^2 x_1^2 y^2 - b^4 x_1^2 y^2 + b^2 c^2 x_1^2 y^2 \\ - a^2 b^2 x^2 x_1 y_1 + b^4 x^2 x_1 y_1 - b^2 c^2 x^2 x_1 y_1 + a^4 x x_1 y y_1 - 2a^2 b^2 x x_1 y y_1 + b^4 x x_1 y y_1 \\ - 3a^2 c^2 x x_1 y y_1 - 3b^2 c^2 x x_1 y y_1 + 2c^4 x x_1 y y_1 + a^4 x_1 y^2 y_1 - a^2 b^2 x_1 y^2 y_1 - a^2 c^2 x_1 y^2 y_1 \\ - a^4 x^2 y_1^2 + a^2 b^2 x^2 y_1^2 + a^2 c^2 x^2 y_1^2 - a^4 x y y_1^2 + a^2 b^2 x y y_1^2 - a^2 c^2 x y y_1^2$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite $\{B, C\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$M_3 = \left\{ 0, \frac{(b^2 x_1 + a^2 y_1) (a^2 x_1 + b^2 x_1 - c^2 x_1 + 2a^2 y_1)}{2a^2 (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{x_1 (a^2 b^2 x_1 - b^4 x_1 + b^2 c^2 x_1 + a^4 y_1 - a^2 b^2 y_1 - a^2 c^2 y_1)}{2a^2 (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)} \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite $\{A, D\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$M_4 = \left\{ \frac{NumX(M_4)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)} \right. \\ \left. \frac{(b^2 x + a^2 y) y_1 (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{- (c^2 x y_1 (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1))}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)} \right\}$$

avec

$$NumX(M_4) = 2b^4 x^2 x_1^2 + 2a^2 b^2 x x_1^2 y + 2b^4 x x_1^2 y - 2b^2 c^2 x x_1^2 y + 2a^2 b^2 x_1^2 y^2 + 2a^2 b^2 x^2 x_1 y_1 \\ + 2a^4 x x_1 y y_1 + a^2 b^2 x x_1 y y_1 + b^4 x x_1 y y_1 - 3a^2 c^2 x x_1 y y_1 - 2b^2 c^2 x x_1 y y_1 + c^4 x x_1 y y_1 \\ + a^4 x_1 y^2 y_1 + a^2 b^2 x_1 y^2 y_1 - a^2 c^2 x_1 y^2 y_1 + a^2 b^2 x^2 y_1^2 - b^4 x^2 y_1^2 + a^2 c^2 x^2 y_1^2 + 2b^2 c^2 x^2 y_1^2 \\ - c^4 x^2 y_1^2 + a^4 x y y_1^2 - a^2 b^2 x y y_1^2 + a^2 c^2 x y y_1^2$$

La distance MM_1^2 a pour valeur

$$MM_1^2 = \frac{(a - b + c) (a + b - c) c^2 (-a + b + c) (a + b + c) x_1^2 y_1^2}{4 (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)^2}$$

La distance MM_2^2 a pour valeur

$$MM_2^2 = \frac{(-a - b + c) (a - b + c) (-a + b + c) (a + b + c) (b^2 x_1 + a^2 y_1)^2 (-x_1 y + x y_1)^2}{4 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)^2}$$

La distance MM_3^2 a pour valeur

$$MM_3^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)x_1^2(b^2x_1 + a^2y_1)^2}{4a^2(b^2x_1^2 + a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 - c^2x_1y_1 + a^2y_1^2)^2}$$

La distance MM_4^2 a pour valeur

$$MM_4^2 = \frac{a^2(-a + b + c)(a + b - c)c^2(a - b + c)(a + b + c)y_1^2(-x_1y + xy_1)^2}{4(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)(b^2x_1^2 + a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 - c^2x_1y_1 + a^2y_1^2)^2}$$

Ces quatre expressions sont divisibles par

$$\frac{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}{4a^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)(b^2x_1^2 + a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 - c^2x_1y_1 + a^2y_1^2)^2}$$

L'évaluation de l'expression $MM_1^2MM_2^2 - MM_3^2MM_4^2$ se ramène, à un facteur multiplicatif près, à l'évaluation de

$$\begin{aligned} & (a^2c^2x_1^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)y_1^2) \left(a^2(b^2x_1 + a^2y_1)^2(-x_1y + xy_1)^2 \right) \\ & - \left(x_1^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)(b^2x_1 + a^2y_1)^2 \right) \left(a^4c^2y_1^2(-x_1y + xy_1)^2 \right) \end{aligned}$$

égal à 0.

Exercice 9.6.2

Soit M un point appartenant au cercle inscrit à un triangle et A, B, C les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle. Montrer que le produit des distances de M aux trois côtés du triangle ABC est égal au produit des distances de ce même point M aux trois côtés du triangle des contacts.

Solution:

Le cercle inscrit est donc décrit par la donnée de trois points distincts A, B, C placés sur un même cercle Γ . Le centre K du cercle Γ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le tracé des trois tangentes au cercle Γ issues des points A, B, C définit le triangle de l'énoncé qui a ainsi pour cercle inscrit Γ .

Dessin = Dessin $\cup \{A, B, C, K, M\} = \{A, B, C, K, M\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K, M .

Avec des notations naturelles, on a

$$M = \left\{ x, y, -\frac{c^2xy}{b^2x + a^2y} \right\}$$

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M = \left\{ \frac{x(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \frac{y(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \frac{-c^2xy}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AB) est le point M_1 de coordonnées barycentriques

$$M_1 = \left\{ \frac{x (2b^2 x + a^2 y + b^2 y - c^2 y)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, \frac{y (a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2a^2 y)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, 0 \right\}$$

La distance MM_1^2 a pour valeur

$$MM_1^2 = \frac{(a - b + c) (a + b - c) c^2 (-a + b + c) (a + b + c) x^2 y^2}{4 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^2}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (BC) est le point M_2 de coordonnées barycentriques

$$M_2 = \left\{ 0, \frac{(b^2 x + a^2 y) (a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2a^2 y)}{2a^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, \frac{x (a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y)}{2a^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)} \right\}$$

La distance MM_2^2 a pour valeur

$$MM_2^2 = \frac{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) x^2 (b^2 x + a^2 y)^2}{4a^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^2}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AC) est le point M_3 de coordonnées barycentriques

$$M_3 = \left\{ \frac{(b^2 x + a^2 y) (2b^2 x + a^2 y + b^2 y - c^2 y)}{2b^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, 0, \frac{y (-a^2 b^2 x + b^4 x - b^2 c^2 x - a^4 y + a^2 b^2 y + a^2 c^2 y)}{2b^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)} \right\}$$

La distance MM_3^2 a pour valeur

$$MM_3^2 = \frac{(a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c) y^2 (b^2 x + a^2 y)^2}{4b^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^2}$$

Il résulte que $MM_1^2 MM_2^2 MM_3^2$ a pour valeur

$$MM_1^2 MM_2^2 MM_3^2 = \frac{(-a + b + c)^3 (a + b - c)^3 c^2 (a - b + c)^3 (a + b + c)^3 x^4 y^4 (b^2 x + a^2 y)^4}{64 a^2 b^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^6}$$

Un point A_1 situé sur la perpendiculaire à (AK) passant par A est

$$A_1 = \{1 + b^2 - c^2, -b^2, c^2\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AA_1) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{ \frac{2b^4x^2 + 2a^2b^2xy + a^2b^2y^2 - b^4y^2 + a^2c^2y^2 + 2b^2c^2y^2 - c^4y^2}{2b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \right. \\ \left. \frac{y(2b^2x + a^2y + b^2y - c^2y)}{2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \right. \\ \left. \frac{-c^2y(2b^2x + a^2y + b^2y - c^2y)}{2b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)} \right\}$$

La distance MP_1^2 a pour valeur

$$MP_1^2 = \frac{a^2(-a+b+c)(a+b-c)c^2(a-b+c)(a+b+c)y^4}{4b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)^2}$$

Un point B_1 situé sur la perpendiculaire à (BK) passant par B est

$$B_1 = \{a^2, 1 - a^2 + c^2, -c^2\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AB_1) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{ \frac{x(a^2x + b^2x - c^2x + 2a^2y)}{2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \right. \\ \left. \frac{(-a^4x^2 + a^2b^2x^2 + 2a^2c^2x^2 + b^2c^2x^2 - c^4x^2 + 2a^2b^2xy + 2a^4y^2)}{2a^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \right. \\ \left. \frac{-c^2x(a^2x + b^2x - c^2x + 2a^2y)}{2a^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)} \right\}$$

La distance MP_2^2 a pour valeur

$$MP_2^2 = \frac{b^2(-a+b+c)(a+b-c)c^2(a-b+c)(a+b+c)x^4}{4a^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)^2}$$

Un point C_1 situé sur la perpendiculaire à (CK) passant par C est

$$C_1 = \{-a^2, b^2, 1 + a^2 - b^2\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (CC_1) est le point P_3 de coordonnées barycentriques

$$P_3 = \left\{ \frac{(b^2x + a^2y)(a^2b^2x - b^4x + b^2c^2x + a^4y - a^2b^2y - a^2c^2y)}{2b^2c^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \right. \\ \left. \frac{-(b^2x + a^2y)(a^2b^2x - b^4x + b^2c^2x + a^4y - a^2b^2y - a^2c^2y)}{2a^2c^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \right. \\ \left. \frac{NumZ(P_3)}{2a^2b^2c^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)} \right\}$$

avec

$$NumZ(P_3) = -a^4b^4x^2 + 2a^2b^6x^2 - b^8x^2 + a^2b^4c^2x^2 + b^6c^2x^2 - 2a^6b^2xy + 4a^4b^4xy - 2a^2b^6xy \\ + 2a^4b^2c^2xy + 2a^2b^4c^2xy - 2a^2b^2c^4xy - a^8y^2 + 2a^6b^2y^2 - a^4b^4y^2 + a^6c^2y^2 + a^4b^2c^2y^2$$

La distance MP_3^2 a pour valeur

$$MP_3^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b^2x+a^2y)^4}{4a^2b^2c^2(b^2x^2+a^2xy+b^2xy-c^2xy+a^2y^2)^2}$$

Il résulte que $MP_1^2 MP_2^2 MP_3^2$ a pour valeur

$$MP_1^2 MP_2^2 MP_3^2 = \frac{(-a+b+c)^3(a+b-c)^3c^2(a-b+c)^3(a+b+c)^3x^4y^4(b^2x+a^2y)^4}{64a^2b^2(b^2x^2+a^2xy+b^2xy-c^2xy+a^2y^2)^6}$$

9.7 Projections et cocyclicité

Exercice 9.7.1

Soient quatre points A, B, C, D appartenant à un même cercle, A_1 (resp. B_1) la projection orthogonale de A (resp. B) sur la droite CD , C_1 (resp. D_1) la projection orthogonale de C (resp. D) sur la droite AB . Montrer que les points A_1, B_1, C_1, D_1 sont cocycliques.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D\}$

Avec des notations naturelles, on a

$$D = \left\{ X, Y, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y} \right\}$$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$D = \left\{ \frac{X(b^2X+a^2Y)}{b^2X^2+a^2XY+b^2XY-c^2XY+a^2Y^2}, \frac{Y(b^2X+a^2Y)}{b^2X^2+a^2XY+b^2XY-c^2XY+a^2Y^2}, \frac{-c^2XY}{b^2X^2+a^2XY+b^2XY-c^2XY+a^2Y^2} \right\}$$

La projection du point A sur la droite (CD) est le point A_1 de coordonnées barycentriques

$$A_1 = \left\{ \frac{X(2b^2X+a^2Y+b^2Y-c^2Y)}{2(b^2X^2+a^2XY+b^2XY-c^2XY+a^2Y^2)}, \frac{Y(2b^2X+a^2Y+b^2Y-c^2Y)}{2(b^2X^2+a^2XY+b^2XY-c^2XY+a^2Y^2)}, \frac{Y(a^2X-b^2X-c^2X+a^2Y-b^2Y+c^2Y)}{2(b^2X^2+a^2XY+b^2XY-c^2XY+a^2Y^2)} \right\}$$

La projection du point B sur la droite (CD) est le point B_1 de coordonnées barycentriques

$$B_1 = \left\{ \frac{X (a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2 a^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \frac{Y (a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2 a^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \frac{X (-a^2 X + b^2 X + c^2 X - a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \right\}$$

La projection du point C sur la droite (AB) est le point C_1 de coordonnées barycentriques

$$C_1 = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 c^2}, 0 \right\}$$

La projection du point D sur la droite (AB) est le point D_1 de coordonnées barycentriques

$$D_1 = \left\{ \frac{X (2 b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \frac{Y (a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2 a^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, 0 \right\}$$

Equation du cercle passant par les points A_1, B_1, C_1

Le centre $M = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MA_1^2 - MB_1^2 = 0$ et $MA_1^2 - MC_1^2 = 0$, soit

$$\begin{aligned} & -a^2 X - 3b^2 X + c^2 X - 3a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y + y (2a^2 X + 2b^2 X - 2c^2 X + 4a^2 Y) \\ & + x (4b^2 X + 2a^2 Y + 2b^2 Y - 2c^2 Y) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^2 b^2 X - b^4 X - b^2 c^2 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y - 2a^2 c^2 Y - b^2 c^2 Y + c^4 Y \\ & + y (-2a^2 b^2 X + 2b^4 X - 2b^2 c^2 X - 2a^4 Y + 2a^2 b^2 Y + 2a^2 c^2 Y) \\ & + x (-2a^2 b^2 X + 2b^4 X + 2b^2 c^2 X - 2a^4 Y + 2a^2 b^2 Y + 4a^2 c^2 Y + 2b^2 c^2 Y - 2c^4 Y) = 0 \end{aligned}$$

chacune de ces équations ayant été simplifiée par le facteur

$$a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$\begin{aligned} x &= \frac{(2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y) (a^2 b^2 X - b^4 X + a^2 c^2 X + 2b^2 c^2 X - c^4 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y + a^2 c^2 Y)}{2 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \\ y &= \frac{(a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y) (a^2 b^2 X - b^4 X - b^2 c^2 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y - 2a^2 c^2 Y - b^2 c^2 Y + c^4 Y)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre du cercle sont ainsi

$$\left\{ \frac{(2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y) (a^2 b^2 X - b^4 X + a^2 c^2 X + 2b^2 c^2 X - c^4 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y + a^2 c^2 Y)}{2 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \frac{(a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y) (a^2 b^2 X - b^4 X - b^2 c^2 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y - 2a^2 c^2 Y - b^2 c^2 Y + c^4 Y)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \frac{(a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y) (a^2 b^2 X - b^4 X + b^2 c^2 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y - a^2 c^2 Y)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y)^2}{4 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}$$

Un point $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$\begin{aligned} 0 = & 2a^2 b^2 X^2 + 2b^4 X^2 - 2b^2 c^2 X^2 - 2a^2 b^2 x X^2 - 6b^4 x X^2 + 2b^2 c^2 x X^2 + 4b^4 x^2 X^2 - 4a^2 b^2 X^2 y \\ & - 4b^4 X^2 y + 4b^2 c^2 X^2 y + 4a^2 b^2 x X^2 y + 4b^4 x X^2 y - 4b^2 c^2 x X^2 y + 4a^2 b^2 X^2 y^2 + a^4 X Y + 6a^2 b^2 X Y \\ & + b^4 X Y - 2a^2 c^2 X Y - 2b^2 c^2 X Y + c^4 X Y - 2a^4 x X Y - 10a^2 b^2 x X Y - 4b^4 x X Y + 4a^2 c^2 x X Y \\ & + 6b^2 c^2 x X Y - 2c^4 x X Y + 4a^2 b^2 x^2 X Y + 4b^4 x^2 X Y - 4b^2 c^2 x^2 X Y - 4a^4 X y Y - 10a^2 b^2 X y Y \\ & - 2b^4 X y Y + 6a^2 c^2 X y Y + 4b^2 c^2 X y Y - 2c^4 X y Y + 4a^4 x X y Y + 8a^2 b^2 x X y Y + 4b^4 x X y Y \\ & - 8a^2 c^2 x X y Y - 8b^2 c^2 x X y Y + 4c^4 x X y Y + 4a^4 X y^2 Y + 4a^2 b^2 X y^2 Y - 4a^2 c^2 X y^2 Y + 2a^4 Y^2 \\ & + 2a^2 b^2 Y^2 - 2a^2 c^2 Y^2 - 4a^4 x Y^2 - 4a^2 b^2 x Y^2 + 4a^2 c^2 x Y^2 + 4a^2 b^2 x^2 Y^2 - 6a^4 y Y^2 - 2a^2 b^2 y Y^2 \\ & + 2a^2 c^2 y Y^2 + 4a^4 x y Y^2 + 4a^2 b^2 x y Y^2 - 4a^2 c^2 x y Y^2 + 4a^4 y^2 Y^2 \end{aligned}$$

Le point $M = D_1$ convient.

La réciproque se démontre de la même façon.

Exercice 9.7.2 *difficile sans l'inversion*

Dans un triangle ABC , on considère le cercle tangent en P_1 et P_2 aux prolongements des droites (AB) , (AC) et tangent au cercle circonscrit à ABC . Montrer que le milieu du segment $[P_1 P_2]$ est le centre J_a du cercle exinscrit dans l'angle A .

Solution:

Soit K le centre du cercle circonscrit à ABC . Nous choisissons un point $D = \{X, Y, \frac{-c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}\}$ sur le cercle circonscrit et un point M sur la droite (KM) , M étant le barycentre de $\{(K, k), (D, (1 - k))\}$. La projection P_1 (resp. P_2) de M sur la droite (AB) (resp. (AC)) doit satisfaire $P_1 M^2 = P_2 M^2 = D M^2$. Ces conditions nous permettent de déterminer les coordonnées barycentriques de M .

Dessin = $\{A, B, C, D, J_a, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, K, J_a .

Les coordonnées barycentriques des points composés D, J_a sont:

$$\begin{aligned} D = & \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}, \right. \\ & \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}, \\ & \left. \frac{-c^2 X Y}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \right\} \\ J_a = & \left\{ \frac{-a}{-a + b + c}, \frac{b}{-a + b + c}, \frac{c}{-a + b + c} \right\} \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M\} = \{A, B, C, D, J_a, K, M\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé $M = \left\{ \frac{x_M}{Den(M)}, \frac{y_M}{Den(M)}, \frac{z_M}{Den(M)} \right\}$ avec

$$\begin{aligned} x_M &= a^4 b^2 X^2 - 2a^2 b^4 X^2 + b^6 X^2 - 2a^2 b^2 c^2 X^2 - 2b^4 c^2 X^2 + b^2 c^4 X^2 + a^2 b^4 k X^2 - b^6 k X^2 + a^2 b^2 c^2 k X^2 \\ &\quad + 2b^4 c^2 k X^2 - b^2 c^4 k X^2 + a^6 X Y - 2a^4 b^2 X Y + a^2 b^4 X Y - 2a^4 c^2 X Y - 2a^2 b^2 c^2 X Y + a^2 c^4 X Y \\ &\quad + 2a^4 b^2 k X Y - 2a^2 b^4 k X Y + 2a^2 b^2 c^2 k X Y + a^6 k Y^2 - a^4 b^2 k Y^2 - a^4 c^2 k Y^2 \\ y_M &= -a^2 b^4 k X^2 + b^6 k X^2 - b^4 c^2 k X^2 + a^4 b^2 X Y - 2a^2 b^4 X Y + b^6 X Y - 2a^2 b^2 c^2 X Y - 2b^4 c^2 X Y \\ &\quad + b^2 c^4 X Y - 2a^4 b^2 k X Y + 2a^2 b^4 k X Y + 2a^2 b^2 c^2 k X Y + a^6 Y^2 - 2a^4 b^2 Y^2 + a^2 b^4 Y^2 - 2a^4 c^2 Y^2 \\ &\quad - 2a^2 b^2 c^2 Y^2 + a^2 c^4 Y^2 - a^6 k Y^2 + a^4 b^2 k Y^2 + 2a^4 c^2 k Y^2 + a^2 b^2 c^2 k Y^2 - a^2 c^4 k Y^2 \\ z_M &= c^2 (-a^2 b^2 k X^2 - b^4 k X^2 + b^2 c^2 k X^2 - a^4 X Y + 2a^2 b^2 X Y - b^4 X Y + 2a^2 c^2 X Y + 2b^2 c^2 X Y - c^4 X Y \\ &\quad - 4a^2 b^2 k X Y - a^4 k Y^2 - a^2 b^2 k Y^2 + a^2 c^2 k Y^2) \end{aligned}$$

$$Den(M) = (a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_1, P_2\} = \{A, B, C, D, J_a, K, M, P_1, P_2\}$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{ \frac{-2b^2 X^2 + b^2 k X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 k Y^2}{2(-b^2 X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 Y^2)}, \frac{-b^2 k X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - 2a^2 Y^2 + a^2 k Y^2}{2(-b^2 X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 Y^2)}, 0 \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{ \frac{2b^4 X^2 - b^4 k X^2 + 3a^2 b^2 X Y + b^4 X Y - b^2 c^2 X Y - 2a^2 b^2 k X Y + a^4 Y^2 + a^2 b^2 Y^2 - a^2 c^2 Y^2 - a^4 k Y^2 + a^2 c^2 k Y^2}{2b^2(b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, 0, \frac{b^4 k X^2 - a^2 b^2 X Y + b^4 X Y - b^2 c^2 X Y + 2a^2 b^2 k X Y - a^4 Y^2 + a^2 b^2 Y^2 + a^2 c^2 Y^2 + a^4 k Y^2 - a^2 c^2 k Y^2}{2b^2(b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \right\}$$

La condition $MP_1^2 - MD^2 = 0$ implique

$$\begin{aligned} 0 &= (b^2 k X^2 + a^2 X Y + 2ab X Y + b^2 X Y - c^2 X Y - 2ab k X Y + a^2 k Y^2) \\ &\quad (b^2 k X^2 + a^2 X Y - 2ab X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + 2ab k X Y + a^2 k Y^2) \end{aligned}$$

La solution de

$$b^2 k X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y \pm 2ab X Y - 2(\pm)ab k X Y + a^2 k Y^2 = 0$$

fournit

$$k = \frac{-a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - 2(\pm)ab X Y}{b^2 X^2 - 2(\pm)ab X Y + a^2 Y^2}$$

La condition $MP_2^2 - MD^2 = 0$ devient

$$0 = (2ab^2X - 2b^2cX \pm 2b^3X + a^3Y - ab^2Y - 2a^2cY + ac^2Y) \\ (2ab^2X + 2b^2cX \pm 2b^3X + a^3Y - ab^2Y + 2a^2cY + ac^2Y)$$

Traitons la situation

$$2ab^2X - 2b^2cX \pm 2b^3X + a^3Y - ab^2Y - 2a^2cY + ac^2Y = 0$$

On obtient alors

$$Y = \frac{-2(ab^2X - b^2cX \pm b^3X)}{a(a^2 - b^2 - 2ac + c^2)}$$

d'où on déduit

$$k = \frac{2(a-b-c)(a+b-c)(a-c \pm b)(a^2 + b^2 - c^2 \pm 2ab)}{a(a^2 + b^2 - 2ac + c^2 \pm 2ab - 2(\pm)bc)^2}$$

et on obtient ainsi

$$M = \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2 + 2(\pm)ab)(a^4 - b^4 - 2a^3c + 2ab^2c + 2b^2c^2 + 2ac^3 - c^4 \pm 2a^3b - 2(\pm)ab^3 - 2(\pm)abc^2)}{(a-b+c)(a+b+c)(a^2 + b^2 - 2ac + c^2 \pm 2ab - 2(\pm)bc)^2}, \right. \\ \left. \frac{4b^2c(a-c \pm b)(a^2 + b^2 - c^2 \pm 2ab)}{(a-b+c)(a+b+c)(a^2 + b^2 - 2ac + c^2 \pm 2ab - 2(\pm)bc)^2}, \right. \\ \left. \frac{-4bc^2(a-c \pm b)(2ab \pm a^2 \pm b^2 - (\pm)c^2)}{(a-b+c)(a+b+c)(a^2 + b^2 - 2ac + c^2 + 2(\pm)ab - 2(\pm)bc)^2} \right\}$$

Explicitement, les points M et M^* possibles sont

$$M = \left\{ \frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3}{(a+b-c)^2(a-b+c)}, \right. \\ \left. \frac{-4b^2c}{(-a+b-c)(a+b-c)^2}, \frac{4bc^2}{(-a+b-c)(a+b-c)^2} \right\}$$

$$M^* = \left\{ \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c - 2abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3}{(a-b-c)^2(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{4b^2c}{(-a+b+c)^2(a+b+c)}, \frac{4bc^2}{(-a+b+c)^2(a+b+c)} \right\}$$

Il nous reste à analyser l'équation

$$2ab^2X + 2b^2cX + 2b^3X \pm X + a^3Y - ab^2Y + 2a^2cY + ac^2Y = 0$$

Le même calcul permet d'obtenir

$$k = \frac{2(a-b+c)(a+b+c)(a+c \pm b)(a^2 + b^2 - c^2 + 2(\pm)ab)}{a(a^2 + b^2 + 2ac + c^2 \pm 2ab \pm 2bc)^2}$$

et deux possibilités pour le point M , soit

$$M = \left\{ \frac{a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3}{(a - b - c)(a + b + c)^2}, \right. \\ \left. \frac{4 b^2 c}{(-a + b + c)(a + b + c)^2}, \frac{4 b c^2}{(-a + b + c)(a + b + c)^2} \right\}$$

$$M = \left\{ \frac{a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + a^2 c + 2 a b c + b^2 c - a c^2 - b c^2 - c^3}{(a + b - c)(a - b + c)^2}, \right. \\ \left. \frac{-4 b^2 c}{(-a + b - c)^2(a + b - c)}, \frac{4 b c^2}{(-a + b - c)^2(a + b - c)} \right\}$$

déjà obtenues.

Dessin = $\{A, B, C, D, J_a, K, M, P_1, P_2\}$

$$M = \left\{ \frac{a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c + 2 a b c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3}{(a + b - c)^2(a - b + c)}, \right. \\ \left. \frac{-4 b^2 c}{(-a + b - c)(a + b - c)^2}, \frac{4 b c^2}{(-a + b - c)(a + b - c)^2} \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{ \frac{-a + b + c}{-a - b + c}, \frac{-2b}{-a - b + c}, 0 \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{ \frac{a + b + c}{a + b - c}, 0, \frac{-2c}{a + b - c} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{I\} = \{A, B, C, D, I, J_a, K, M, P_1, P_2\}$

Soit I le milieu de $[P_1 P_2]$.

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont I .

Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$I = \left\{ \frac{a}{a + b - c}, \frac{b}{a + b - c}, \frac{-c}{a + b - c} \right\}$$

Ce point ne convient pas, la droite joignant le point C à ce point coupe (AB) en un point intérieur au segment $[AB]$, ce qui est exclu dans le contexte de l'énoncé.

Dessin = $\{A, B, C, D, J_a, K, M, P_1, P_2\}$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{M^*\} = \{A, B, C, D, I, J_a, K, M, M^*, P_1, P_2\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M^* .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$M^* = \left\{ \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c - 2abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3}{(a-b-c)^2(a+b+c)}, \frac{4b^2c}{(-a+b+c)^2(a+b+c)}, \frac{4bc^2}{(-a+b+c)^2(a+b+c)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_1^*, P_2^*\} = \{A, B, C, D, I, J_a, K, M, M^*, P_1, P_1^*, P_2, P_2^*\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont P_1^*, P_2^* .

La projection du point M^* sur la droite (AB) est le point P_1^* de coordonnées barycentriques

$$P_1^* = \left\{ \frac{-a-b+c}{-a+b+c}, \frac{2b}{-a+b+c}, 0 \right\}$$

La projection du point M^* sur la droite (AB) est le point P_2^* de coordonnées barycentriques

$$P_2^* = \left\{ \frac{-a+b-c}{-a+b+c}, 0, \frac{2c}{-a+b+c} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I^*\} = \{A, B, C, D, I, I^*, J_a, K, M, M^*, P_1, P_1^*, P_2, P_2^*\}$

Soit I^* le milieu du segment $P_1^*P_2^*$.

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont I^* .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$I^* = \left\{ \frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c} \right\}$$

Ce point est le centre du cercle exinscrit.