

Géométrie vectorielle algorithmique

ou

La géométrie vectorielle par l'informatique

*Comment résoudre les exercices de géométrie vectorielle
sans faire les dessins ?*

Jean-Paul JURZAK

L'auteur autorise la libre diffusion de ce travail, à des fins non-commerciales.

Préface

Ce travail est destiné à un large public d'enseignants, d'étudiants et aussi d'informaticiens. Son but est d'aborder la géométrie vectorielle sous un aspect nouveau permettant de résoudre la plupart des exercices de géométrie vectorielle sans le support traditionnel d'une figure géométrique représentative.

Dans le premier chapitre de cet ouvrage, nous expliquons la méthode concrètement en l'illustrant par des exemples classiques largement commentés afin de permettre au lecteur de se familiariser avec cette optique. Les chapitres suivants, traités plus sommairement, aborderont d'autres thèmes de la géométrie vectorielle répertoriés dans le sommaire.

La méthode s'inspire dans ses grandes lignes de la chimie classique qui classe les éléments naturels en corps purs et corps composés. A partir de cette analogie, il nous est permis de résoudre automatiquement un exercice sans recourir au support intuitif du dessin géométrique qui s'avère parfois complexe.

Notre démarche est efficace dans le cadre de la géométrie vectorielle générale et très adaptée à son insertion en informatique. Mais elle ne traite pas convenablement la géométrie métrique, c'est à dire celle qui invoque les angles, les rotations, produits scalaires: il semble que le concept d'angle soit un concept plan trop restreint.

Cette Géométrie vectorielle a plusieurs objectifs, en particulier:

- permettre au lycéen de mieux saisir les divers aspects de la géométrie proposée au programme par une approche plus concrète des mathématiques et par-delà même, valoriser ce pôle scientifique.
- conduire l'étudiant vers une réflexion plus profonde des concepts de la géométrie, en particulier en s'intéressant à la richesse de la géométrie métrique plane et à la création de géométries abstraites.
- permettre à l'étudiant au Capes ou à l'Agrégation, de programmer une partie des exercices de géométrie qu'il rencontre, réfléchir à l'analyse des données sous-jacentes et obtenir la solution en mettant en oeuvre un programme de calcul symbolique exigé à ces Concours.
- aller au-delà de cet ouvrage en simplifiant une partie des exercices de la géométrie métrique, sans recourir au calcul algébrique dans un système de coordonnées.

Conscient des ouvertures de cette méthode mais aussi de ses limites, il m'a semblé intéressant de faire partager ce savoir-faire adapté à nos outils informatiques modernes. Dans quelques années, les programmes symboliques tiendront dans une calculette et notre enseignement pourra difficilement ignorer l'importance de l'analyse des données, l'importance de leur programmation et la banalisation des calculs volumineux et des résolutions des systèmes d'équations linéaires.

Jean-Paul JURZAK
Faculté des Sciences Mirande
Université de Bourgogne
21000 - DIJON France

mail: Jean-Paul.Jurzak@u-bourgogne.fr

CHAPITRE

1

Initiation

1.1 Préliminaires:

Comme indiqué dans la préface, l'objet de ce travail est d'élaborer une nouvelle démarche de résolution des exercices de géométrie vectorielle que l'on peut qualifier de résolution automatique. Le terme "automatique" signifie ici que le traditionnel dessin géométrique représentatif, n'est pas nécessaire à l'aboutissement de la solution.

Cette démarche automatique est en effet possible en s'inspirant de la chimie classique qui décrit les corps chimiques en les classant, soit en corps purs, soit en corps composés (chaque corps composé ayant une unique représentation à partir des corps purs).

Pour des raisons pédagogiques, nous conservons les termes "purs" et "composés", le point de départ de chaque exercice étant constitué du choix judicieux des **points purs** et des **points composés**. En fait, on verra que ces points purs et composés peuvent être générés automatiquement.

Nous avons choisi d'illustrer nos considérations par la résolution d'exemples classiques. Les premiers exemples d'initiation de ce chapitre sont commentés en détail afin de saisir le caractère automatique de la méthode. Les solutions obtenues présentent parfois des ressemblances avec la méthode analytique ou la méthode barycentrique.

Il va de soi que cette optique algorithmique offre une solution dont la rédaction est d'apparence plus longue que celle d'une solution issue de raisonnements astucieux. En réalité, la non-considération détaillée du dessin conforte le lecteur incertain et les astuces intermédiaires deviennent inutiles au point qu'il peut démarrer bon nombre d'exercice en commençant par la dernière question. Les indispensables calculs de substitution n'offrent aucune difficulté théorique, ils deviennent de jour en jour, estompés par **l'outil informatique qui fait partie de l'enseignement de demain**. Ainsi, nous ne scrutons plus un dessin comme support d'aide et faisons peu de différences entre un exercice dans le plan et un exercice dans l'espace.

1.2 La résolution automatique des exercices:

Revenons à la démarche traditionnelle de résolution d'un exercice de géométrie. En utilisant un support papier, nous dessinons d'abord quelques points, quelques droites mentionnés dans l'énoncé: nous avons fabriqué par le dessin un socle de départ. Ensuite, nous plaçons d'autres points ou d'autres droites tributaires de ce socle jusqu'à l'obtention du dessin final.

Les premiers points que nous avons dessinés sont probablement des points purs car nous les avons placés librement sur le support papier.

Ainsi, nous appelons "**point pur**" un point placé au hasard sur le papier. Par opposition, un "**point composé**" est un point dont le dessin sur le papier, est soumis à des contraintes relevant des points déjà dessinés.

Dans un premier temps, chaque exercice est résolu de la façon suivante:

1. à la lecture de l'énoncé, nous décidons quels sont les points purs qui s'imposent.

Choisir des points se trouvant sur des intersections de droites.

2. pour chaque point composé, nous recherchons la relation vectorielle qui le caractérise.

S'il s'agit d'un point situé à l'intersection de 2 ensembles (droites ou plan), nous serons amenés à résoudre un système linéaire.

3. nous soumettons chaque relation vectorielle à un découpage automatique, en utilisant un point O qui n'appartient pas aux données de l'exercice (**le point O est un point fictif**, ce n'est pas un point "origine"). Le découpage automatique est la relation

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

réitérée systématiquement.

Ainsi, une relation vectorielle telle que $3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{BC}$ générera

$$3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) - 5(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

L'expression $3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - 5(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})$ est inacceptable.

4. l'ensemble des relations vectorielles est devenu, après l'action des découpages, un système d'équations linéaires (les inconnues étant initialement toutes les quantités \overrightarrow{OP} avec P point de l'énoncé) dont la résolution nous permet d'obtenir les expressions des points composés en fonction des points purs. La plupart du temps, ce système d'équations linéaires se résout par cascades successives.

Un test simple nous permet de vérifier l'exactitude de nos calculs: la somme des coefficients nécessaires à la description d'un point composé, est toujours égale à 1.

5. **l'exercice se résume ainsi à une liste de formules**, chacune d'elle fournissant la description d'un point composé en fonction des points purs.

Les calculs intermédiaires ont uniquement servi à obtenir le descriptif de chaque point composé. Ils peuvent être effacés de la feuille de brouillon.

6. il nous est alors permis de répondre aux diverses questions de l'exercice.

Par exemple, pour montrer qu'une droite (AM) est parallèle à une droite (BJ) , nous évaluons

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \dots \text{etc}$$

puis

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OB} = \dots \text{etc}$$

en faisant intervenir les descriptifs des points composés. Ainsi, par ces diverses substitutions, \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BJ} obtiennent des expressions en fonction des points purs.

Et on constatera alors que l'expression \overrightarrow{AM} est proportionnelle à \overrightarrow{BJ} .

Par souci pédagogique, nous gérons la solution de chaque exercice en réservant sur la droite de notre feuille de papier, une large marge destinée à **visualiser l'expression des points composés**. Ainsi, nous aurons la présentation suivante:

Exercice:
 énoncé de l'exercice

Solution:

Les points composés sont D, ...etc..

Par des découpages automatiques, nous obtenons l'expression des points composés.

Nous mémorisons l'expression obtenue

Les calculs effectués dans cette colonne n'interviendront pas dans la suite.

On répond aux diverses questions de l'exercice en **utilisant le formulaire** constitué par la colonne à notre droite.

Points purs
A, B, C

$$\vec{OD} = 3 \vec{OA} + 2 \vec{OB} - 4 \vec{OC}$$

Choix des points purs

Description d'un point composé

1.3 Un exemple instructif

Nous étudions un exemple intéressant pour lequel nous développons la rédaction de deux solutions, *une solution détaillée* nécessaire à un premier contact et *une solution abrégée* correspondant aux fréquentes solutions type adoptées dans ce travail. *Une troisième solution* qui choisit automatiquement les points purs et les points composés n'est pas mise en oeuvre pour l'instant.

Exercice 1.3.1 (*Bac Amiens, 1966*)

Soit un triangle ABC et soit M, N, P les milieux respectifs de BC, CA, AB .

1. Démontrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

2. Soit I un point quelconque, et J et K les points définis par $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{BN}$. Montrer que le milieu E de JK est tel que $\overrightarrow{IE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Solution commentée:

1). Les points A, B, C sont placés au hasard, l'un par rapport à l'autre, dans le plan: nous décidons que ce sont nos points purs, en raison de la formulation " placés au hasard ".

Points purs
 A, B, C

Etre le milieu d'un segment génère une relation vectorielle. Chacun des points M, N, P est positionné précisément par rapport aux points A, B, C par cette relation vectorielle: les points M, N, P sont donc des points composés.

La relation $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ engendre le découpage automatique

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$$

donc

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

que l'on enregistre dans la marge de droite.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

Tout autre relation (par exemple $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$) aboutit au même résultat.

La relation $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$ engendre le découpage automatique

$$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}$$

donc

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

que l'on enregistre dans la marge de droite.

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

La relation $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ engendre le découpage automatique

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$$

donc

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

que l'on enregistre dans la marge de droite.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$. Il nous suffit de lire les informations regroupées dans la marge de droite. On a :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} \\ &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}}{2} \\ &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}}{2} = \vec{0} \end{aligned}$$

2). Le point I est un point quelconque, il peut donc être placé librement dans le plan, sans se référer aux autres points: c'est donc un nouveau point pur. Les points J, K sont composés car chaque relation vectorielle indiquée permet de les positionner dans le plan. Le point E est le milieu d'un segment dont les extrémités sont des points déjà mentionnés, c'est donc un point composé.

Point pur
 I

La relation $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CP}$ engendre le découpage automatique

$$\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}$$

donc

$$\overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OI}$$

mais nous ne pouvons pas enregistrer \overrightarrow{OJ} dans la marge de droite car P n'est pas pur. On doit donc écrire:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OJ} &= -\overrightarrow{OC} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \overrightarrow{OI} \\ &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2} \end{aligned}$$

et on enregistre alors dans la marge de droite l'expression de \overrightarrow{OJ} . Notons qu'une réponse maladroite telle que:

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2}$$

contient une erreur car la somme des coefficients

$$\frac{1 + 1 + 2 + 2}{2}$$

doit toujours être égale à 1 (ici, la fraction a pour valeur 3). De même, $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{IK}$ engendre le découpage automatique

$$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB} = -(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OI})$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{OK} &= \vec{OB} - \vec{ON} + \vec{OI} \\ &= \vec{OB} - \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} + \vec{OI} \\ &= \frac{-\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OI}}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{OK} = \frac{-\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OI}}{2}$$

que l'on enregistre dans la marge de droite.

Il nous reste à obtenir la formule relative au point E .

On a le découpage:

$$\vec{0} = -\vec{EK} + \vec{JE} = 2\vec{OE} - \vec{OJ} - \vec{OK}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$2\vec{OE} - \vec{OJ} - \vec{OK} = \frac{-3\vec{OB} + 3\vec{OC} + 4\vec{OE} - 4\vec{OI}}{2}$$

Il en résulte que:

$$\vec{OE} = \frac{3\vec{OB} - 3\vec{OC} + 4\vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OE} = \frac{3\vec{OB} - 3\vec{OC} + 4\vec{OI}}{4}$$

Calculons le vecteur \vec{IE} . On a:

$$\vec{IE} = \frac{3\vec{OB} - 3\vec{OC}}{4}$$

Calculons le vecteur \vec{BC} . On a:

$$\vec{BC} = -\vec{OB} + \vec{OC}$$

On constate que

$$\vec{IE} = \frac{-3}{4} \vec{BC}$$

.....

Solution modèle:

1). Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont M, N, P (ceci signifie que l'on cherche à décrire les points M, N, P en fonction des points A, B, C).

Points purs
 A, B, C, I

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{BM} - \vec{MC} = -\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OM} \\ \vec{0} &= \vec{CN} - \vec{NA} = -\vec{OA} - \vec{OC} + 2\vec{ON} \\ \vec{0} &= \vec{AP} - \vec{PB} = -\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OP} \end{aligned}$$

En résolvant progressivement ces équations, on déduit les descriptions des points composés :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$. On a:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} \\ &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}}{2} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

2). Le point I est quelconque, c'est donc un point pur.

Les points J, K sont composés.

On a les découpages successifs:

Point pur
 I

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OI} \end{aligned}$$

Tenant compte des points composés précédents, on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{IJ} = \frac{-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OJ} - 2\overrightarrow{OI}}{2} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{IK} = \frac{\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OK} - 2\overrightarrow{OI}}{2} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2}$$

Le point E est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = -\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OK}$$

Tenant compte des points composés précédents, on obtient:

$$\vec{0} = -\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{JE} = \frac{-3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OE} - 4\overrightarrow{OI}}{2}$$

On déduit la description du point composé:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OI}}{4}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OI}}{4}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{IE} . On a:

$$\overrightarrow{IE} = \frac{3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}}{4}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{BC} . On a:

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{IE} = \frac{-3}{4} \overrightarrow{BC}$$

1.4 Le choix des points purs et des points composés

De nombreux exercices de géométrie vectorielle donnent d'emblée naissance à une liste de relations vectorielles qui positionnent les points les uns par rapport aux autres (nous reviendrons ultérieurement sur les exercices de géométrie vectorielle contenant le mot "intersection", exercices pour lesquels nous devons limiter le nombre de points purs). Par exemple, l'exercice d'initiation est le reflet des équations vectorielles:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{NA} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PB} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{IK} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{JE} \end{aligned}$$

Cette liste d'équations devient le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$$

On notera que la somme des coefficients de chaque équation vaut 0.

Envisageons un exercice de géométrie vectorielle utilisant les points A_1, A_2, \dots, A_n et décrit par la donnée d'une liste d'équations vectorielles (soit p le nombre d'équations de cette liste) du type

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}\overrightarrow{OA_1} + a_{12}\overrightarrow{OA_2} + \dots + a_{1(n-1)}\overrightarrow{OA_{n-1}} + (1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j})\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0} \\ a_{21}\overrightarrow{OA_1} + a_{22}\overrightarrow{OA_2} + \dots + a_{2(n-1)}\overrightarrow{OA_{n-1}} + (1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{2j})\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0} \\ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = \overrightarrow{0} \\ a_{p1}\overrightarrow{OA_1} + a_{p2}\overrightarrow{OA_2} + \dots + a_{p(n-1)}\overrightarrow{OA_{n-1}} + (1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{pj})\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$$

où les a_{ij} sont des coefficients souvent réels, parfois symboliques (α, β, \dots).

Posons $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ensemble d'indices. La résolution (le plus souvent en cascade) de ce système linéaire, ayant pour inconnues la liste

$$(\overrightarrow{OA_i})_{i \in I} = \{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}\}$$

amène le descriptif d'une sous-famille $(\overrightarrow{OA_i})_{i \in J}$ en fonction des $\overrightarrow{OA_j}$ avec $j \notin J$. En d'autres termes, les $(\overrightarrow{OA_i})_{i \in J}$ sont les inconnues du système linéaire et les $(\overrightarrow{OA_j})_{j \notin J}$ sont les paramètres.

En résumé, les points A_j pour $j \notin J$ sont les **points purs** cherchés, et les A_i pour $i \in J$, sont les **points composés** exprimés en fonction des points purs.

1.5 Aspects de la méthode analytique et de la méthode informatique

La résolution d'un exercice par la méthode analytique consiste à utiliser un repère dans lequel chaque point de l'exercice est décrit par des coordonnées. Les calculs s'avèrent simplifiés par un choix judicieux du repère et deviennent lourds lorsque la dimension de l'espace croît.

Un fréquent défaut dans l'utilisation d'un repère est le choix d'un repère utilisant les points dessinés en priorité (repères du style repère= $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \dots)$) avec, pour conséquence invisible, des coordonnées maladroites amenant des calculs avec de multiples paramètres, augmentant ainsi la complexité et engendrant aussi d'invérifiables erreurs.

La méthode informatique (méthode algorithmique) dégage les points purs, soit automatiquement (résolution d'un système linéaire cf section I.4), soit librement, par choix sur le dessin de points situés à de multiples intersections. Le nombre de points purs n'est pas limité à 3 pour un exercice plan, à 4 pour un exercice dans l'espace.

La méthode informatique (ou algorithmique) n'introduit pas de repère et ne fait aucune distinction entre un exercice dans le plan et un exercice dans l'espace (ou dans un espace de dimension supérieure). Dans cette optique, les concepts de plan, d'espace, ... n'existent pas et *l'exercice se résume à des calculs symboliques*: l'espace environnant n'a pas à être précisé, sauf lorsqu'il est question d'intersections (l'intersection de 2 plans passant par un même point peut se réduire à ce point en dimension 4). De surcroît, les possibles erreurs de calcul de la méthode informatique sont facilement détectables et deviennent inexistantes lorsque l'outil informatique a participé à l'obtention des réponses: en outre, on peut abrégier l'écriture des expressions vectorielles en omettant le point O .

En fait, le point O étant fictif (ce n'est pas un point "origine"), on peut lui attribuer momentanément une valeur et générer ainsi des formules vectorielles. Ainsi, dans l'exercice d'initiation, l'expression

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2}$$

donne, en prenant momentanément $O = A$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AI}}{2}$$

et en prenant momentanément $O = B$

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BI}}{2}$$

et en prenant $O = J$

$$\vec{0} = \vec{JA} + \vec{JB} - 2\vec{JC} + 2\vec{JI}$$

L'évaluation du vecteur \vec{NJ} suggère le choix $O = N$ qui donne:

$$\vec{NJ} = \frac{\vec{NA} + \vec{NB} - 2\vec{NC} + 2\vec{NI}}{2}$$

Cette expression peut paraître inutilisable puisque N a pour descriptif

$$\vec{ON} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$$

Mais, $\vec{NA} = \frac{-\vec{AC}}{2}$ en prenant $O = A$, $\vec{NB} = \frac{-\vec{BA} - \vec{BC}}{2}$ en prenant $O = B$, etc.... En substituant chaque terme dans l'expression de \vec{NJ} , on obtient une expression plus ou moins satisfaisante de \vec{NJ} . Pour le calcul de \vec{NJ} , il est hautement préférable de revenir au découpage automatique

$$\vec{NJ} = \vec{OJ} - \vec{ON}$$

égal à:

$$\begin{aligned} \vec{OJ} - \vec{ON} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC} + 2\vec{OI}}{2} - \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} \\ &= \frac{\vec{OB} - 3\vec{OC} + 2\vec{OI}}{2} \end{aligned}$$

La somme des coefficients de cette expression est automatiquement égale à 0 (ici $\frac{1-3+2}{2} = 0$), donc le vecteur

$$\vec{NJ} = \vec{OB} - 3\vec{OC} + 2\vec{OI}$$

est indépendant de O (ce fait est d'autant plus certain que le point fictif O est externe à l'étude géométrique).

Il en résulte, en prenant $O = A$ par exemple, ou $O = C$, que:

$$\vec{NJ} = \frac{\vec{AB} - 3\vec{AC} + 2\vec{AI}}{2} = \frac{\vec{CB} + 2\vec{CI}}{2} = \text{etc...}$$

De même, pour l'expression $3\vec{AM} + \vec{BN} - 2\vec{CP}$, on obtient:

$$\begin{aligned} &3\vec{AM} + \vec{BN} - 2\vec{CP} \\ &= 3(\vec{OM} - \vec{OA}) + (\vec{ON} - \vec{OB}) - 2(\vec{OP} - \vec{OC}) \\ &= 3\frac{\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}}{2} + \frac{\vec{OA} + \vec{OC} - 2\vec{OB}}{2} - 2\frac{\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}}{2} \\ &= \frac{3\vec{OB} + 3\vec{OC} - 6\vec{OA} + \vec{OA} + \vec{OC} - 2\vec{OB} - 2\vec{OA} - 2\vec{OB} + 4\vec{OC}}{2} \\ &= \frac{-7\vec{OA} + \vec{OB} + 8\vec{OC}}{2} \end{aligned}$$

Ici, la somme des coefficients vaut $\frac{-7+1+8}{2} \neq 0$, il y donc erreur de calcul.

La réponse correcte est en effet:

$$3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{CP} = \frac{-7\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC}}{2}$$

et, comme précédemment, cette expression est indépendante du point fictif O . Par exemple,

$$3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{CP} = \frac{-\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{AC}}{2}$$

Un test simple nous permet de vérifier l'exactitude des calculs: la somme des coefficients nécessaires à la description d'une expression vectorielle, découpée par l'insertion systématique du point fictif O , est toujours égale à 0.

Un exercice de géométrie vectorielle plane (resp. dans l'espace), ne contenant que 3 points purs (resp. 4 points purs), peut être considéré théoriquement comme un exercice utilisant un repère (il suffit de choisir pour O l'un des points purs). Mais les calculs par la méthode informatique sont incontestablement plus homogènes et plus agréables.

1.6 Exemples

Ces exemples visent à montrer que la méthode informatique permet de résoudre les exercices de 2 façons.

1. Le lecteur ignore le dessin géométrique. Dans ce cas, il choisit les points purs comme indiqué dans la section I.4.
2. Le lecteur s'appuie sur le dessin géométrique et il propose sa propre liste de points purs.

Exercice 1.6.1

On considère un triangle ABC . Soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des bipoints $(B, C), (A, C), (A, B)$. Un point I quelconque étant donné, soient J et K les points définis par

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CC_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{BB_1}$$

1. Montrer que JKA_1A est un parallélogramme.
2. Soit E le milieu de JK . Montrer que les droites (IE) et (BC) sont parallèles.

Solution:

1). Les phrases significatives sont:

- A_1 les milieux respectifs des bipoints (B, C)
- B_1 les milieux respectifs des bipoints (A, C)

C_1 les milieux respectifs des bipoints (A, B)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{CC_1} \\ \overrightarrow{IK} &= -\overrightarrow{BB_1} \end{aligned}$$

La liste des équations vectorielles est

$$\begin{cases} \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{A_1C} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{B_1A} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{C_1B} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{IK} \end{cases}$$

d'où les découpages successifs:

$$\begin{cases} \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA_1} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB_1} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC_1} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OI} \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} & \overrightarrow{OA_1} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ \overrightarrow{OB_1} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} & \overrightarrow{OB_1} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ \overrightarrow{OC_1} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} & \overrightarrow{OC_1} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \\ \overrightarrow{OJ} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2} & \overrightarrow{OJ} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2} \\ \overrightarrow{OK} &= \frac{-\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2} & \overrightarrow{OK} &= \frac{-\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{2} \end{aligned}$$

Ceci signifie que les points purs sont A, B, C, I .

Les points composés sont alors A_1, B_1, C_1, J, K .

1). Pour cette question, nous devons comparer les vecteurs \overrightarrow{JK} et $\overrightarrow{AA_1}$.

Calculons le vecteur \overrightarrow{JK} . On a:

$$\overrightarrow{JK} = \frac{-2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{-2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

Points purs
 A, B, C, I

Il en résulte que

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AA_1}$$

2). Le point E est un nouveau point composé.

On a le découpage successif:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{JE} - \overrightarrow{EK} = -\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{OE}$$

Tenant compte des points composés précédents, on obtient:

$$-\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{OE} = \frac{-3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OE} - 4\overrightarrow{OI}}{2}$$

On déduit la description:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OI}}{4}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OI}}{4}$$

Il nous faut montrer que les vecteurs \overrightarrow{IE} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires. Calculons le vecteur \overrightarrow{IE} . On a:

$$\overrightarrow{IE} = \frac{3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}}{4}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{BC} . On a:

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{IE} = \frac{-3}{4} \overrightarrow{BC}$$

donc les droites (IE) et (BC) sont parallèles.

Exercice 1.6.2

Soit quatre points non coplanaires A, B, C, D . On désigne par I le milieu de (A, B) et par J le milieu de (CD) . Démontrer que les droites (AD) , (IJ) et (BC) sont parallèles à un même plan.

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont I, J .

Le lecteur est libre de choisir d'autres points purs, par exemple I, J, A, D ou suivre la démarche indiquée dans la section 1.4.

On a les découpages successifs:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{JD} = -\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OJ}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

Points purs
 A, B, C, D

$$\vec{OJ} = \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2}$$

$$\vec{OJ} = \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{IJ} . On a:

$$\vec{IJ} = \frac{-\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{2}$$

Calculons le vecteur $\gamma_1 \vec{AD} + \gamma_2 \vec{BC}$. On a:

$$\gamma_1 \vec{AD} + \gamma_2 \vec{BC} = -\gamma_1 \vec{OA} - \gamma_2 \vec{OB} + \gamma_2 \vec{OC} + \gamma_1 \vec{OD}$$

En prenant $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = 1$, on obtient $\vec{IJ} = \vec{AD} + \vec{BC}$. Donc, les 3 droites (AD) , (IJ) et (BC) sont parallèles à un même plan.

Exercice 1.6.3

Soient $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ deux parallélogrammes et I, J, K, L les milieux respectifs des bipoints AA_1, BB_1, CC_1 et DD_1 .

Montrer que la figure $IJKL$ est un parallélogramme.

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C, A_1, B_1, C_1 .

Les points composés sont D, D_1, I, J, K, L .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C, A_1, B_1, C_1

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{AB} - \vec{DC} &= -\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} + \vec{OD} \\ \vec{0} &= \vec{A_1B_1} - \vec{D_1C_1} &= -\vec{OA_1} + \vec{OB_1} - \vec{OC_1} + \vec{OD_1} \\ \vec{0} &= \vec{AI} - \vec{IA_1} &= -\vec{OA} - \vec{OA_1} + 2\vec{OI} \\ \vec{0} &= \vec{BJ} - \vec{JB_1} &= -\vec{OB} - \vec{OB_1} + 2\vec{OJ} \\ \vec{0} &= \vec{CK} - \vec{KC_1} &= -\vec{OC} - \vec{OC_1} + 2\vec{OK} \\ \vec{0} &= \vec{DL} - \vec{LD_1} &= -\vec{OD} - \vec{OD_1} + 2\vec{OL} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} & \vec{OD} &= \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} \\ \vec{OD_1} &= \vec{OA_1} - \vec{OB_1} + \vec{OC_1} & \vec{OD_1} &= \vec{OA_1} - \vec{OB_1} + \vec{OC_1} \\ \vec{OI} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OA_1}}{2} & \vec{OI} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OA_1}}{2} \\ \vec{OJ} &= \frac{\vec{OB} + \vec{OB_1}}{2} & \vec{OJ} &= \frac{\vec{OB} + \vec{OB_1}}{2} \\ \vec{OK} &= \frac{\vec{OC} + \vec{OC_1}}{2} & \vec{OK} &= \frac{\vec{OC} + \vec{OC_1}}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{OL} = \frac{\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA}_1 - \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1}{2}$$

$$\vec{OL} = \frac{\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}}{2} + \frac{\vec{OA}_1 - \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{IJ} . On a:

$$\vec{IJ} = \vec{OJ} - \vec{OI} = \frac{-\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{LK} . On a:

$$\vec{LK} = \vec{OK} - \vec{OL} = \frac{-\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1}{2}$$

donc la figure $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 1.6.4

Soit ABC un triangle et I le milieu de BC . on désigne par P et R deux points tels que:

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AP} + \vec{AR}$$

Nature du quadrilatère $BPCR$. Montrer que I est le milieu de PR .

Solution:

Le choix des points purs n'est pas immédiat. Nous procédons comme indiqué dans la section 1.4. Les équations vectorielles sont:

$$\begin{cases} \vec{0} &= \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AP} - \vec{AR} \\ \vec{0} &= \vec{BI} - \vec{IC} \end{cases}$$

d'où le système

$$\begin{cases} \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OP} - \vec{OR} &= \vec{0} \\ 2\vec{OI} - \vec{OB} - \vec{OC} &= \vec{0} \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

et

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OR}$$

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OR}$$

les inconnues étant \vec{OI} et \vec{OP} , les paramètres étant $\vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OR}$.

Les points purs sont donc B, C, R .

Les points composés sont I, P .

Calculons

$$\vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = \vec{OC} - \vec{OR}$$

et

$$\vec{RC} = \vec{OC} - \vec{OR}$$

La figure $BPCR$ est donc un parallélogramme.

Soit J le milieu de PR . On a directement:

$$\vec{OJ} = \frac{\vec{OP} + \vec{OR}}{2} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OR} + \vec{OR}}{2}$$

donc $\vec{OI} = \vec{OJ}$, soit $I = J$.

Points purs
 B, C, R

Exercice 1.6.5

Soit $ABCD$ un tétraèdre, α, β des réels. Soient E, F, G, H des points vérifiant les relations

$$\begin{aligned} \alpha \vec{AB} + \vec{AF} - \vec{CE} &= \vec{0} \\ \vec{EF} - 2\vec{EH} &= \vec{0} \\ \vec{GA} + \vec{HD} + 2\vec{HE} &= \vec{0} \\ -\vec{BE} + \beta \vec{GC} + \vec{HF} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Préciser les valeurs de α et β de telle sorte que la droite (AH) soit parallèle à la droite (EG) .

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont F, E, G, H .

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \alpha \vec{AB} + \vec{AF} - \vec{CE} = (-1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OE} + \vec{OF}$$

$$\vec{0} = \vec{EF} - 2\vec{EH} = \vec{OE} + \vec{OF} - 2\vec{OH}$$

$$\vec{0} = \vec{GA} + \vec{HD} + 2\vec{HE} = \vec{OA} + \vec{OD} + 2\vec{OE} - \vec{OG} - 3\vec{OH}$$

$$\vec{0} = -\vec{BE} + \beta \vec{GC} + \vec{HF} = \vec{OB} + \beta \vec{OC} - \vec{OE} + \vec{OF} - \beta \vec{OG} - \vec{OH}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OG} = \frac{(1 + 2\alpha) \vec{OA} + (1 - 2\alpha) \vec{OB} + (-2 + \beta) \vec{OC} - \vec{OD}}{-1 + \beta}$$

$$\vec{OH} = \frac{(-1 - \alpha - \alpha\beta) \vec{OA} + (-1 + \alpha + \alpha\beta) \vec{OB} + \vec{OC} + \beta \vec{OD}}{-1 + \beta}$$

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{(1+2\alpha)\vec{OA} + (1-2\alpha)\vec{OB}}{-1+\beta} \\ &+ \frac{(-2+\beta)\vec{OC} - \vec{OD}}{-1+\beta} \end{aligned}$$

Points purs
 A, B, C, D

$$\overrightarrow{OF} = \frac{(-3 - 3\alpha + \beta - \alpha\beta)\overrightarrow{OA} + (-2 + 3\alpha + \alpha\beta)\overrightarrow{OB} + (3 - \beta)\overrightarrow{OC} + 2\beta\overrightarrow{OD}}{2(-1 + \beta)}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{(-1 - \alpha - \beta - 3\alpha\beta)\overrightarrow{OA} + (-2 + \alpha + 3\alpha\beta)\overrightarrow{OB} + (1 + \beta)\overrightarrow{OC} + 2\beta\overrightarrow{OD}}{2(-1 + \beta)}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \frac{(-1 - \alpha - \alpha\beta)\overrightarrow{OA}}{-1 + \beta} \\ &+ \frac{(-1 + \alpha + \alpha\beta)\overrightarrow{OB}}{-1 + \beta} \\ &+ \frac{\overrightarrow{OC} + \beta\overrightarrow{OD}}{-1 + \beta} \\ \overrightarrow{OF} &= \frac{(-3 - 3\alpha + \dots)\overrightarrow{OA} + \dots}{2(-1 + \beta)}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{(-1 - \alpha - \beta - 3\alpha\beta)\overrightarrow{OA} + \dots}{2(-1 + \beta)}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{AH} . On a :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{(-\alpha - \beta - \alpha\beta)\overrightarrow{OA} + (-1 + \alpha + \alpha\beta)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \beta\overrightarrow{OD}}{-1 + \beta}$$

Cas $\beta \neq 1$:

Calculons le vecteur \overrightarrow{EG} . On a :

$$\overrightarrow{EG} = \frac{(3 + 5\alpha + \beta + 3\alpha\beta)\overrightarrow{OA} + (4 - 5\alpha - 3\alpha\beta)\overrightarrow{OB} + (-5 + \beta)\overrightarrow{OC} + (-2 - 2\beta)\overrightarrow{OD}}{2(-1 + \beta)}$$

Les droites sont parallèles lorsque les coefficients sont proportionnels:

$$\frac{-\alpha - \beta - \alpha\beta}{3 + 5\alpha + \beta + 3\alpha\beta} = \frac{-1 + \alpha + \alpha\beta}{4 - 5\alpha - 3\alpha\beta} = \frac{1}{-5 + \beta} = \frac{\beta}{-2 - 2\beta}$$

Le système

$$\frac{1}{-5 + \beta} = \frac{\beta}{-2 - 2\beta}$$

implique $\beta = 1$ ou $\beta = 2$.

Pour $\beta = 1$, on obtient

$$\frac{-1 - 2\alpha}{4 + 8\alpha} = \frac{-1 + 2\alpha}{4 - 8\alpha}$$

donc n'importe quel $\alpha \in \mathbf{R}$ convient et la droite (AH) soit parallèle à la droite (EG) . La valeur commune des 4 fractions est alors $\frac{-1}{4}$.

Pour $\beta = 2$, on obtient

$$\frac{-2 - 3\alpha}{5 + 11\alpha} = \frac{-1 + 3\alpha}{4 - 11\alpha}$$

donc $\alpha = \frac{1}{2}$. La valeur commune des 4 fractions est alors $\frac{-1}{3}$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$, la droite (AH) soit parallèle à la droite (EG) .

Cas $\beta = 1$:

Les points purs choisis sont A, B, C, E .

Les points composés sont F, H, G, D .

Points purs

On a les découpages successifs:

A, B, C, E

$$\vec{0} = \alpha \vec{AB} + \vec{AF} - \vec{CE} = (-1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OE} + \vec{OF}$$

$$\vec{0} = \vec{EF} - 2\vec{EH} = \vec{OE} + \vec{OF} - 2\vec{OH}$$

$$\vec{0} = \vec{GA} + \vec{HD} + 2\vec{HE} = \vec{OA} + \vec{OD} + 2\vec{OE} - \vec{OG} - 3\vec{OH}$$

$$\vec{0} = -\vec{BE} + \vec{GC} + \vec{HF} = \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OE} + \vec{OF} - \vec{OG} - \vec{OH}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OF} = (1 + \alpha) \vec{OA} - \alpha \vec{OB} - \vec{OC} + \vec{OE}$$

$$\vec{OH} = \frac{(1+\alpha)\vec{OA} - \alpha\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OE}}{2}$$

$$\vec{OG} = \frac{(1+\alpha)\vec{OA} + (2-\alpha)\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OE}}{2}$$

$$\vec{OD} = (1 + 2\alpha) \vec{OA} + (1 - 2\alpha) \vec{OB} - \vec{OC}$$

$$\vec{OF} = (1 + \alpha) \vec{OA} - \alpha \vec{OB} - \vec{OC} + \vec{OE}$$

$$\vec{OH} = \frac{(1+\alpha)\vec{OA} - \alpha\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OE}}{2}$$

$$\vec{OG} = \frac{(1+\alpha)\vec{OA} + (2-\alpha)\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OE}}{2}$$

$$\vec{OD} = (1 + 2\alpha) \vec{OA} + (1 - 2\alpha) \vec{OB} - \vec{OC}$$

Calculons le vecteur \vec{AH} . On a:

$$\vec{AH} = \frac{(-1 + \alpha) \vec{OA} - \alpha \vec{OB} - \vec{OC} + 2 \vec{OE}}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{EG} . On a:

$$\vec{EG} = \frac{(1 + \alpha) \vec{OA} + (2 - \alpha) \vec{OB} + \vec{OC} - 4 \vec{OE}}{2}$$

Ainsi, lorsque $\beta = 1$, la droite (AH) n'est jamais parallèle à la droite (EG) quelque soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

CHAPITRE

2

Introduction au barycentre

Nous illustrons ce chapitre par des exercices qui évitent volontairement les questions d'intersections (traitées dans les chapitres ultérieurs).

2.1 Barycentres dans le plan

Exercice 2.1.1

Soit ABC un triangle de centre de gravité G et A_1, B_1, C_1 les points définis par les égalités

$$\alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1}$$

$$\beta \overrightarrow{BA} + \alpha \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB_1}$$

$$\alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CC_1}$$

Montrer que le centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$ est G .

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C .

Nous désignons par G_1 le centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$.

Les points composés sont A_1, B_1, C_1, G_1, G .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OG} \\ \vec{0} &= \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} &= (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \beta \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA_1} \\ \vec{0} &= \beta \overrightarrow{BA} + \alpha \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1} &= \beta \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OB} + \alpha \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB_1} \\ \vec{0} &= \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CC_1} &= \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} + \overrightarrow{G_1A_1} &= -3\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OA_1} = (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \beta \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \beta \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OB} + \alpha \overrightarrow{OC}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OA} \\ &+ \alpha \overrightarrow{OB} + \beta \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC_1} &= \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB_1} &= \beta \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OC} \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ \overrightarrow{OG_1} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ \overrightarrow{OC_1} &= \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \end{aligned}$$

Il résulte que $G = G_1$, donc les triangles ABC et du triangle $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité.

Exercice 2.1.2

Soit ABC un triangle de centre de gravité G . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ des réels et

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{barycentre des points pondérés } (A, \alpha_1), (B, \alpha_2), (C, 1 - \alpha_1 - \alpha_2) \\ G_2 &= \text{barycentre des points pondérés } (A, \beta_1), (B, \beta_2), (C, 1 - \beta_1 - \beta_2) \\ G_3 &= \text{barycentre des points pondérés } (A, \gamma_1), (B, \gamma_2), (C, 1 - \gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante (portant sur les réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$) pour que le barycentre du triangle $G_1G_2G_3$ soit le point G .

Solution:

Soit H le centre de gravité du triangle G_1, G_2, G_3 .

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont G, G_1, G_2, G_3, H .

Points purs
 A, B, C

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OG} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{HG_1} + \overrightarrow{HG_2} + \overrightarrow{HG_3} = \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3} - 3\overrightarrow{OH} \\ \vec{0} &= \alpha_1 \overrightarrow{G_1A} + \alpha_2 \overrightarrow{G_1B} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \overrightarrow{G_1C} = -\overrightarrow{OG_1} + \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \alpha_2 \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \overrightarrow{OC} \\ \vec{0} &= \beta_1 \overrightarrow{G_2A} + \beta_2 \overrightarrow{G_2B} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \overrightarrow{G_2C} = \beta_1 \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG_2} + \beta_2 \overrightarrow{OB} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \overrightarrow{OC} \\ \vec{0} &= \gamma_1 \overrightarrow{G_3A} + \gamma_2 \overrightarrow{G_3B} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \overrightarrow{G_3C} = \gamma_1 \overrightarrow{OA} + \gamma_2 \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG_3} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} & \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ \overrightarrow{OG_1} &= \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \alpha_2 \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OG_1} &= \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \alpha_2 \overrightarrow{OB} \\ & & & \quad + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OG_2} &= \beta_1 \overrightarrow{OA} + \beta_2 \overrightarrow{OB} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OG_2} &= \beta_1 \overrightarrow{OA} + \beta_2 \overrightarrow{OB} \\ & & & \quad + (1 - \beta_1 - \beta_2) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

$$\vec{OG}_3 = \gamma_1 \vec{OA} + \gamma_2 \vec{OB} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC}$$

$$\vec{OH} = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \vec{OA} + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \vec{OB} + (3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC}}{3}$$

$$\begin{aligned} \vec{OG}_3 &= \gamma_1 \vec{OA} + \gamma_2 \vec{OB} \\ &\quad + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC} \\ \vec{OH} &= \frac{(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \vec{OA}}{3} \\ &\quad + \frac{(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \vec{OB}}{3} \\ &\quad + \frac{(3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC}}{3} \end{aligned}$$

L'égalité $G = H$ équivaut à l'égalité des coefficients intervenant dans \vec{OH} , soit

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2$$

condition qui équivaut (en prenant la moyenne des 3 coefficients) à

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$$

2.2 Barycentres dans l'espace

Exercice 2.2.1

Soit un tétraèdre $ABCD$. On désigne par I le milieu de AB , J le milieu de AC , K le milieu de AD , I_1 le milieu de CD , J_1 le milieu de DB , K_1 le milieu de BC , G le centre de gravité du tétraèdre. Démontrer que

$$\vec{II_1} + \vec{JJ_1} + \vec{KK_1} = 2\vec{AG}$$

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont $G, I, J, K, I_1, J_1, K_1$.

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C, D

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{AI} - \vec{IB} &= -\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OI} \\ \vec{0} &= \vec{AJ} - \vec{JC} &= -\vec{OA} - \vec{OC} + 2\vec{OJ} \\ \vec{0} &= \vec{AK} - \vec{KD} &= -\vec{OA} - \vec{OD} + 2\vec{OK} \\ \vec{0} &= \vec{CI_1} - \vec{I_1D} &= -\vec{OC} - \vec{OD} + 2\vec{OI_1} \\ \vec{0} &= \vec{DJ_1} - \vec{J_1B} &= -\vec{OB} - \vec{OD} + 2\vec{OJ_1} \\ \vec{0} &= \vec{BK_1} - \vec{K_1C} &= -\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OK_1} \\ \vec{0} &= \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} - 4\vec{OG} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

$$\vec{OJ} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OJ} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ_1} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ_1} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK_1} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK_1} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

Calculons le vecteur $2\overrightarrow{AG}$. On a:

$$2\overrightarrow{AG} = \frac{-3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{II_1} + \overrightarrow{JJ_1} + \overrightarrow{KK_1}$. On a:

$$\overrightarrow{II_1} + \overrightarrow{JJ_1} + \overrightarrow{KK_1} = \frac{-3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

On a ainsi

$$2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{II_1} + \overrightarrow{JJ_1} + \overrightarrow{KK_1}$$

Exercice 2.2.2

Soit $ABCD$ un tétraèdre de centre de gravité G . On désigne par E, F des points tels que l'on ait $2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$. Déterminer le point H de l'espace de telle sorte que le centre de gravité du tétraèdre $AEFH$ soit le point G .

Solution:

La liste des équations vectorielles est

$$\left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{EC} + 3\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$$

d'où les découpages successifs:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} - 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$$

La résolution de ce système linéaire implique

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \frac{-\vec{OC}+3\vec{OD}}{2} \\ \vec{OG} &= \frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{4} \\ \vec{OH} &= \frac{-\vec{OA}+\vec{OB}+3\vec{OC}-\vec{OD}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \frac{-\vec{OC}+3\vec{OD}}{2} \\ \vec{OG} &= \frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{4} \\ \vec{OH} &= \frac{-\vec{OA}+\vec{OB}+3\vec{OC}-\vec{OD}}{2}\end{aligned}$$

Points purs
A, B, C, D

Les points purs choisis sont donc A, B, C, D.
Les points composés sont F, E, G, H.
Ceci définit la description du point H.

Exercice 2.2.3

Soit ABCD un tétraèdre, G son centre de gravité. On considère les tétraèdres ABCG, ABGD, AGCD, GBCD et soient D', C', B', A' leurs centres de gravités respectifs. Montrer que le centre de gravité du tétraèdre A'B'C'D' est le point G.

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C, D.
Le point G est composé.
On a le découpage:

Points purs
A, B, C, D

$$\vec{0} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} - 4\vec{OG}$$

On déduit la description du point composé:

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{4}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{4}$$

Les points purs choisis sont A, B, C, D.
Les points composés sont D', C', B', A'.
On a les découpages successifs:

Points purs
A, B, C, D

$$\vec{0} = \vec{D'A} + \vec{D'B} + \vec{D'C} + \vec{D'G} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OG} - 4\vec{OD'}$$

$$\vec{0} = \vec{C'A} + \vec{C'B} + \vec{C'D} + \vec{C'G} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OG} - 4\vec{OC'}$$

$$\vec{0} = \vec{B'A} + \vec{B'C} + \vec{B'D} + \vec{B'G} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OG} - 4\vec{OB'}$$

$$\vec{0} = \vec{A'B} + \vec{A'C} + \vec{A'D} + \vec{A'G} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OG} - 4\vec{OA'}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \vec{D'A} + \vec{D'B} + \vec{D'C} + \vec{D'G} = \frac{5\vec{OA} + 5\vec{OB} + 5\vec{OC} + \vec{OD} - 16\vec{OD'}}{4}$$

$$\vec{0} = \vec{C'A} + \vec{C'B} + \vec{C'D} + \vec{C'G} = \frac{5\vec{OA} + 5\vec{OB} + \vec{OC} + 5\vec{OD} - 16\vec{OC'}}{4}$$

$$\vec{0} = \vec{B'A} + \vec{B'C} + \vec{B'D} + \vec{B'G} = \frac{5\vec{OA} + \vec{OB} + 5\vec{OC} + 5\vec{OD} - 16\vec{OB'}}{4}$$

$$\vec{0} = \vec{A'B} + \vec{A'C} + \vec{A'D} + \vec{A'G} = \frac{\vec{OA} + 5\vec{OB} + 5\vec{OC} + 5\vec{OD} - 16\vec{OA'}}{4}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OD'} = \frac{5\vec{OA} + 5\vec{OB} + 5\vec{OC} + \vec{OD}}{16}$$

$$\vec{OD'} = \frac{5\vec{OA} + 5\vec{OB} + 5\vec{OC} + \vec{OD}}{16}$$

$$\vec{OC'} = \frac{5\vec{OA} + 5\vec{OB} + \vec{OC} + 5\vec{OD}}{16}$$

$$\vec{OC'} = \frac{5\vec{OA} + 5\vec{OB} + \vec{OC} + 5\vec{OD}}{16}$$

$$\vec{OB'} = \frac{5\vec{OA} + \vec{OB} + 5\vec{OC} + 5\vec{OD}}{16}$$

$$\vec{OB'} = \frac{5\vec{OA} + \vec{OB} + 5\vec{OC} + 5\vec{OD}}{16}$$

$$\vec{OA'} = \frac{\vec{OA} + 5\vec{OB} + 5\vec{OC} + 5\vec{OD}}{16}$$

$$\vec{OA'} = \frac{\vec{OA} + 5\vec{OB} + 5\vec{OC} + 5\vec{OD}}{16}$$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Le point G_1 est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = \vec{G_1D'} + \vec{G_1C'} + \vec{G_1B'} + \vec{G_1A'} = -4\vec{OG_1} + \vec{OD'} + \vec{OC'} + \vec{OB'} + \vec{OA'}$$

Points purs
 A, B, C, D

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \vec{G_1D'} + \vec{G_1C'} + \vec{G_1B'} + \vec{G_1A'} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} - 4\vec{OG_1}$$

On déduit la description du point composé:

$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

Il résulte que $G_1 = G$.

Exercice 2.2.4

Soit $ABCD$ un tétraèdre, G son centre de gravité et I un point quelconque de l'espace. On considère les tétraèdres $ABCI$, $ABID$, $AICD$, $IBCD$ et soient D' , C' , B' , A' leurs centres de gravités respectifs. Soit G_1 le centre de gravité du tétraèdre $A'B'C'D'$. Montrer que les points G, G_1, I sont alignés et justifier la formule $\vec{GG_1} = \frac{1}{4}\vec{GI}$.

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C, D, I .

Le point G est composé.

Points purs
 A, B, C, D, I

On a le découpage:

$$\vec{0} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} - 4\vec{OG}$$

On déduit la description du point composé:

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

Les points composés sont D', C', B', A' .

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \vec{D'A} + \vec{D'B} + \vec{D'C} + \vec{D'I} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OI} - 4\vec{OD'}$$

$$\vec{0} = \vec{C'A} + \vec{C'B} + \vec{C'D} + \vec{C'I} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OI} - 4\vec{OC'}$$

$$\vec{0} = \vec{B'A} + \vec{B'C} + \vec{B'D} + \vec{B'I} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OI} - 4\vec{OB'}$$

$$\vec{0} = \vec{A'B} + \vec{A'C} + \vec{A'D} + \vec{A'I} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OI} - 4\vec{OA'}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OD'} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OD'} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OC'} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OC'} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OB'} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OB'} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OA'} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OI}}{4}$$

$$\vec{OA'} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OI}}{4}$$

Les points purs choisis sont A, B, C, D, I .

Le point G_1 est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = \vec{G_1D'} + \vec{G_1C'} + \vec{G_1B'} + \vec{G_1A'} = -4\vec{OG_1} + \vec{OD'} + \vec{OC'} + \vec{OB'} + \vec{OA'}$$

Points purs
 A, B, C, D, I

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \vec{G_1D'} + \vec{G_1C'} + \vec{G_1B'} + \vec{G_1A'} = \frac{3\vec{OA} + 3\vec{OB} + 3\vec{OC} + 3\vec{OD} - 16\vec{OG_1} + 4\vec{OI}}{4}$$

On déduit la description du point composé:

$$\vec{OG_1} = \frac{3\vec{OA} + 3\vec{OB} + 3\vec{OC} + 3\vec{OD} + 4\vec{OI}}{16}$$

$$\vec{OG_1} = \frac{3\vec{OA} + 3\vec{OB}}{16} + \frac{3\vec{OC} + 3\vec{OD} + 4\vec{OI}}{16}$$

En prenant $O = G$ et en utilisant $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$, on obtient la formule demandée.

CHAPITRE

3

Intersections de droites dans le plan

Ce chapitre joue un rôle important car il permet de déterminer des **points composés** pour lesquels il n'existe pas à priori de relation vectorielle qui leur est associée. Pour de tels exercices, la progression se réalise **par étapes successives** et reflète l'élaboration progressive du dessin géométrique correspondant. Il n'est donc plus question d'écrire un système très général d'équations vectorielles invoquant tous les points de l'exercice et d'obtenir la description totale des points composés. Pour plus de clarté dans la rédaction de la solution des exercices, on précise assez fréquemment la partie du dessin analysée par une indication du type **Dessin** = { A, B, \dots } qui énumère la liste progressive des points observés.

3.1 Intersections de deux droites

Jusqu'à présent, les points composés rencontrés étaient directement associés à une relation vectorielle explicite: le découpage automatique était donc mis en oeuvre instantanément et amenait ainsi la formule descriptive de ce point composé.

Considérons une phrase du type:

"Soit I le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite (CD) "

dans laquelle I est un **point composé** dont nous souhaitons obtenir la formule descriptive en fonction des points purs.

Les vecteurs \vec{AI} et \vec{BI} sont colinéaires, mais le coefficient α intervenant dans l'égalité $\vec{AI} = \alpha \vec{BI}$ est inconnu. Nous procédons alors comme suit:

- De la formule $\vec{AI} = \alpha \vec{BI}$, nous déduisons une première expression de \vec{OI} en fonction des points purs.
- Comme on a, de la même façon, $\vec{CI} = \beta \vec{DI}$ (le coefficient β étant inconnu), nous déduisons une seconde expression de \vec{OI} en fonction des points purs.
- Les deux expressions obtenues pour \vec{OI} doivent être identiques. En égalant les coefficients respectifs des deux expressions, nous obtenons un système d'équations linéaires d'inconnues (α, β) .
- Nous résolvons ce système d'équations linéaires (il suffit d'obtenir la valeur de l'une des deux inconnues (α, β)). En reportant cette valeur dans l'une des expressions vectorielles relative à \vec{OI} , nous obtenons la formule descriptive relative au point I en fonction des points purs.

Dans ce chapitre, nous mettons en oeuvre *cette démarche qui convient pour beaucoup d'exercices*. On notera que le nombre de points purs doit être limité à 3 pour de tels exercices du plan.

Pour des situations faisant intervenir au moins 4 points purs, nous renvoyons à l'exercice 3.3.1.

On notera que:

Test vérificateur de (α, β)
 Le système d'équations linéaires mentionné comporte toujours une équation qui est combinaison linéaire des autres (la somme des coefficients intervenant dans chaque \vec{OI} ayant pour valeur 1).
 Ainsi, on résoudra le système linéaire en omettant une équation et les valeurs de (α, β) ainsi obtenues seront testées dans l'équation restante

3.2 Exemples

Exercice 3.2.1

Soit ABC un triangle, F le milieu de AB et D un point de la droite (BC) vérifiant $\vec{BD} = 4\vec{BC}$. On désigne par E le point de la droite (AD) tel que l'on ait $\vec{AE} = 3\vec{AD}$.
 Soit K le point d'intersection de la droite (EF) avec la droite (BC) , I le point d'intersection de la droite (AK) avec la droite (CF) , J le point d'intersection de la droite (AB) avec la droite (DI) .
 Déterminer le réel k tel que l'on ait $\vec{AJ} = k\vec{AB}$.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, F\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont D, F .

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -4\vec{BC} + \vec{BD} = 3\vec{OB} - 4\vec{OC} + \vec{OD} \\ \vec{0} &= \vec{AF} - \vec{FB} = -\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OF} \end{aligned}$$

Points purs
 A, B, C

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= -3\vec{OB} + 4\vec{OC} & \vec{OD} &= -3\vec{OB} + 4\vec{OC} \\ \vec{OF} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} & \vec{OF} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, F, E\}$

Le point E est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = -3\vec{AD} + \vec{AE} = 2\vec{OA} - 3\vec{OD} + \vec{OE}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = -3\vec{AD} + \vec{AE} = 2\vec{OA} + 9\vec{OB} - 12\vec{OC} + \vec{OE}$$

On déduit la description du point composé:

$$\vec{OE} = -2\vec{OA} - 9\vec{OB} + 12\vec{OC}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, F, E, K\}$

Détermination du point K:

Le point K est composé.

Comme $K \in (EF)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OK} = \mu_1 \overrightarrow{OE} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OF}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(1 - 5\mu_1) \overrightarrow{OA} + (1 - 19\mu_1) \overrightarrow{OB} + 24\mu_1 \overrightarrow{OC}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{1 - 5\mu_1}{2}, \quad \frac{1 - 19\mu_1}{2}, \quad 12\mu_1$$

Comme $K \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{5} \quad \nu_1 = \frac{-7}{5}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-7\overrightarrow{OB} + 12\overrightarrow{OC}}{5}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-7\overrightarrow{OB} + 12\overrightarrow{OC}}{5}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, F, E, K, I\}$

Détermination du point I:

Le point I est composé.

Comme $I \in (AK)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OI} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{5\mu_1 \overrightarrow{OA} + (-7 + 7\mu_1) \overrightarrow{OB} + (12 - 12\mu_1) \overrightarrow{OC}}{5}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad \frac{7(-1 + \mu_1)}{5}, \quad \frac{-12(-1 + \mu_1)}{5}$$

Comme $I \in (CF)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OI} = \nu_1 \vec{OC} + (1 - \nu_1) \vec{OF}$$

On déduit:

$$\vec{OI} = \frac{(1 - \nu_1) \vec{OA} + (1 - \nu_1) \vec{OB} + 2\nu_1 \vec{OC}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{1 - \nu_1}{2}, \quad \frac{1 - \nu_1}{2}, \quad \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{7}{2} \quad \nu_1 = -6$$

On déduit que:

$$\vec{OI} = \frac{7\vec{OA} + 7\vec{OB} - 12\vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OI} = \frac{7\vec{OA} + 7\vec{OB} - 12\vec{OC}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, F, E, K, I, J\}$

Détermination du point J:

Le point J est composé.

Comme $J \in (DI)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OJ} = \mu_1 \vec{OD} + (1 - \mu_1) \vec{OI}$$

On déduit:

$$\vec{OJ} = \frac{(7 - 7\mu_1) \vec{OA} + (7 - 13\mu_1) \vec{OB} + (-12 + 20\mu_1) \vec{OC}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-7(-1 + \mu_1)}{2}, \quad \frac{7 - 13\mu_1}{2}, \quad 2(-3 + 5\mu_1)$$

Comme $J \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OJ} = \nu_1 \vec{OA} + (1 - \nu_1) \vec{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\nu_1, \quad 1 - \nu_1, \quad 0$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{3}{5} \quad \nu_1 = \frac{7}{5}$$

On déduit que:

$$\vec{OJ} = \frac{7\vec{OA} - 2\vec{OB}}{5}$$

$$\vec{OJ} = \frac{7\vec{OA} - 2\vec{OB}}{5}$$

En prenant $O = A$, on déduit $\vec{AJ} = \frac{-2\vec{AB}}{5}$.

Exercice 3.2.2

Soient A, B, C, D des points quelconques. Démontrer qu'il existe un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CE) tel que les droites (MN) et (EA) soient parallèles, quelques soient les points A, B, C, D .

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C, D, E .

Les points composés sont M, N .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C, D, E

$$\vec{0} = -\alpha \vec{AB} + \vec{AM} = (-1 + \alpha) \vec{OA} - \alpha \vec{OB} + \vec{OM}$$

$$\vec{0} = -\beta \vec{CE} + \vec{EN} = \beta \vec{OC} + (-1 - \beta) \vec{OE} + \vec{ON}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OM} = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OB}$$

$$\vec{OM} = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OB}$$

$$\vec{ON} = -\beta \vec{OC} + (1 + \beta) \vec{OE}$$

$$\vec{ON} = -\beta \vec{OC} + (1 + \beta) \vec{OE}$$

Calculons le vecteur \vec{MN} . On a:

$$\vec{MN} = (-1 + \alpha) \vec{OA} - \alpha \vec{OB} - \beta \vec{OC} + (1 + \beta) \vec{OE}$$

Calculons le vecteur \vec{EA} . On a:

$$\vec{EA} = \vec{OA} - \vec{OE}$$

Les vecteurs \vec{MN} et \vec{EA} doivent être colinéaires quelques soient les points A, B, C, D . On déduit $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. On a ainsi

$$\vec{MN} = -\vec{EA}$$

Exercice 3.2.3

Soit ABC un triangle et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ des réels. On pose

$$G_1 = \text{barycentre des points pondérés } (A, \alpha_1), (B, \alpha_2), (C, 1 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$G_2 = \text{barycentre des points pondérés } (A, \beta_1), (B, \beta_2), (C, 1 - \beta_1 - \beta_2)$$

$$G_3 = \text{barycentre des points pondérés } (A, \gamma_1), (B, \gamma_2), (C, 1 - \gamma_1 - \gamma_2)$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante (portant sur les réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$) pour que les points G_1, G_2, G_3 soient sur une même droite.

Solution:

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont G_1, G_2, G_3 .

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{G_1A} + \alpha_2 \vec{G_1B} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \vec{G_1C} = -\vec{OG_1} + \alpha_1 \vec{OA} + \alpha_2 \vec{OB} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \vec{OC}$$

$$\vec{0} = \beta_1 \vec{G_2A} + \beta_2 \vec{G_2B} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \vec{G_2C} = \beta_1 \vec{OA} - \vec{OG_2} + \beta_2 \vec{OB} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \vec{OC}$$

$$\vec{0} = \gamma_1 \vec{G_3A} + \gamma_2 \vec{G_3B} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{G_3C} = \gamma_1 \vec{OA} + \gamma_2 \vec{OB} - \vec{OG_3} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OG_1} = \alpha_1 \vec{OA} + \alpha_2 \vec{OB} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \vec{OC}$$

$$\vec{OG_2} = \beta_1 \vec{OA} + \beta_2 \vec{OB} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \vec{OC}$$

$$\vec{OG_3} = \gamma_1 \vec{OA} + \gamma_2 \vec{OB} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC}$$

Points purs
 A, B, C

$$\vec{OG_1} = \alpha_1 \vec{OA} + \alpha_2 \vec{OB} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \vec{OC}$$

$$\vec{OG_2} = \beta_1 \vec{OA} + \beta_2 \vec{OB} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \vec{OC}$$

$$\vec{OG_3} = \gamma_1 \vec{OA} + \gamma_2 \vec{OB} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC}$$

Calculons le vecteur $\vec{G_1G_2}$. On a:

$$\vec{G_1G_2} = (-\alpha_1 + \beta_1) \vec{OA} + (-\alpha_2 + \beta_2) \vec{OB} + (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2) \vec{OC}$$

Calculons le vecteur $\vec{G_1G_3}$. On a:

$$\vec{G_1G_3} = (-\alpha_1 + \gamma_1) \vec{OA} + (-\alpha_2 + \gamma_2) \vec{OB} + (\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_1 - \gamma_2) \vec{OC}$$

Chacun de ces 2 vecteurs est indépendant de O , donc, en prenant $O = C$

$$\vec{G_1G_2} = (-\alpha_1 + \beta_1) \vec{CA} + (-\alpha_2 + \beta_2) \vec{CB}$$

$$\vec{G_1G_3} = (-\alpha_1 + \gamma_1) \vec{CA} + (-\alpha_2 + \gamma_2) \vec{CB}$$

Ces 2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si

$$\frac{-\alpha_1 + \beta_1}{-\alpha_1 + \gamma_1} = \frac{-\alpha_2 + \beta_2}{-\alpha_2 + \gamma_2}$$

Exercice 3.2.4

On considère un triangle ABC et M un point de la médiane (AA_1) . Les droites (BM) et (AC) se coupent en B_1 et les droites (CM) et (AB) en C_1 . Démontrer que les droites (BC) et (B_1C_1) sont parallèles.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, A_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Le point A_1 est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = -\vec{A_1C} + \vec{BA_1} = 2\vec{OA_1} - \vec{OB} - \vec{OC}$$

On déduit la description du point composé:

Points purs
 A, B, C

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, A_1, M\}$

Le point M est placé au hasard sur la droite (AA_1) , donc il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AA_1}$. Le point M est composé.

On a le découpage successif:

$$\overrightarrow{0} = -k \overrightarrow{OA_1} + (-1 + k) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\overrightarrow{0} = -k \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AM} = \frac{(-2 + 2k) \overrightarrow{OA} - k \overrightarrow{OB} - k \overrightarrow{OC} + 2 \overrightarrow{OM}}{2}$$

On déduit la description du point composé:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2(1-k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB} + k \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2(1-k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB} + k \overrightarrow{OC}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, A_1, M, B_1\}$

Détermination du point B_1 :

Le point B_1 est composé.

Comme $B_1 \in (BM)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OB_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{(2 - 2k - 2\mu_1 + 2k)\mu_1 \overrightarrow{OA} + (k + 2\mu_1 - k\mu_1) \overrightarrow{OB} + (k - k\mu_1) \overrightarrow{OC}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$(-1 + k)(-1 + \mu_1), \quad \frac{k + 2\mu_1 - k\mu_1}{2}, \quad \frac{k(1 - \mu_1)}{2}$$

Comme $B_1 \in (AC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OB_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C ,

$$\nu_1, \quad 0, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 a pour solutions

$$\mu_1 = \frac{-k}{2 - k} \quad \nu_1 = \frac{2(k - 1)}{k - 2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{2(k-1) \overrightarrow{OA} - k \overrightarrow{OC}}{k-2}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{2(k-1) \overrightarrow{OA} - k \overrightarrow{OC}}{k-2}$$

La situation $k = 2$ correspond au parallélisme strict des droites (AC) et (AM) , situation exclue par l'énoncé.

Dessin = $\{A, B, C, A_1, M, B_1, C_1\}$

Détermination du point C_1 :

Le point C_1 est composé.

Comme $C_1 \in (CM)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{(2 - 2k - 2\mu_1 + 2k\mu_1) \overrightarrow{OA} + k(1 - \mu_1) \overrightarrow{OB} + (k + 2\mu_1 - k\mu_1) \overrightarrow{OC}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C ,

$$(k - 1)(\mu_1 - 1), \quad \frac{k(1 - \mu_1)}{2}, \quad \frac{k + 2\mu_1 - k\mu_1}{2}$$

Comme $C_1 \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\nu_1, \quad 1 - \nu_1, \quad 0$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-k}{2 - k} \quad \nu_1 = \frac{2(k - 1)}{k - 2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{2(k-1)\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{-2+k} \qquad \overrightarrow{OC_1} = \frac{2(k-1)\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{-2+k}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{BC} . On a:

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_1C_1}$. On a:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{-k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{-2 + k}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{k}{k - 2} \overrightarrow{BC}$$

Exercice 3.2.5

Soient 4 points distincts A, B, C, D du plan. Un point E situé sur la droite (AB) vérifie $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, un point F situé sur la droite (CD) vérifie $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}$.

Soit G l'intersection de la droite (AB) et de la droite (CD) . On suppose que G satisfait aux conditions $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{EC}$. Préciser la position du point $K \in (AB) \cap (DG)$.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G\}$

La liste d'équations vectorielles est

$$\begin{cases} \frac{-1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{0} \\ \frac{-1}{3} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0} \\ \frac{-1}{4} \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0} \\ \frac{-2}{3} \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

On a les découpages successifs:

$$\begin{cases} -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0} \\ -2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0} \\ -3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OF} + 4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0} \\ -2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} + 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} - 7\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2\overrightarrow{OA} - 7\overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}}{6}$$

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} - 7\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2\overrightarrow{OA} - 7\overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}}{6}$$

Les points purs sont A, B, C .

Les points composés sont D, E, F, G .

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G, K\}$

Détermination du point K :

Le point K est composé.

Comme $K \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OK} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 0$$

Points purs
 A, B, C

Comme $K \in (DG)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1 \overrightarrow{OD} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OG}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(1 + 11\nu_1) \overrightarrow{OA} + (1 - 43\nu_1) \overrightarrow{OB} + (4 + 32\nu_1) \overrightarrow{OC}}{6}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{1 + 11\nu_1}{6}, \quad \frac{1 - 43\nu_1}{6}, \quad \frac{2(1 + 8\nu_1)}{3}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-1}{16} \quad \nu_1 = \frac{-1}{8}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-\overrightarrow{OA} + 17\overrightarrow{OB}}{16} \qquad \overrightarrow{OK} = \frac{-\overrightarrow{OA} + 17\overrightarrow{OB}}{16}$$

Exercice 3.2.6

Soit un triangle ABC et une droite (Δ) qui coupe les côtés (BC) , (CA) et (BA) respectivement en A_1 , B_1 et C_1 . Soient A_2, B_2, C_2 les symétriques de A_1, B_1, C_1 par rapport au milieu du côté du triangle ABC sur lequel se trouve respectivement chaque point précité (on a $A_2 \in (BC)$, $B_2 \in (AC)$, $C_2 \in (AB)$). Montrer que les points A_2, B_2, C_2 sont alignés.

Solution:

La droite (Δ) s'identifie à la droite B_1, C_1 , les points B_1 et C_1 étant placés arbitrairement sur chacune des droites GA et GB .

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont B_1, C_1 .

Points purs
 A, B, C

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \alpha \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB_1} = (1 - \alpha) \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB_1} \\ \vec{0} &= \beta \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC_1} = (1 - \beta) \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC_1} \end{aligned}$$

avec α et β constantes arbitraires.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB_1} &= (1 - \alpha) \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OB_1} &= (1 - \alpha) \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OC_1} &= (1 - \beta) \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC_1} &= (1 - \beta) \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, A_1\}$

Détermination du point A_1 :

Le point A_1 est composé.

Comme $A_1 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OA_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \mu_1, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $A_1 \in (B_1C_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OA_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OA_1} = (1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1) \overrightarrow{OA} + (\beta - \beta\nu_1) \overrightarrow{OB} + \alpha\nu_1 \overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1, \quad -\beta(-1 + \nu_1), \quad \alpha\nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\beta - \beta\alpha}{\beta - \alpha} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \beta}{\beta - \alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{(\beta - \beta\alpha) \overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \overrightarrow{OC}}{\beta - \alpha} \qquad \overrightarrow{OA_1} = \frac{(\beta - \beta\alpha) \overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \overrightarrow{OC}}{\beta - \alpha}$$

Soient I, J, K les milieux respectifs de $[B, C], [A, C], [A, B]$.

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, A_1, I, J, K\}$

Les points I, J, K sont composés.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC} &= -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{JC} &= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OJ} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} &= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OK} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} & \overrightarrow{OI} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ \overrightarrow{OJ} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} & \overrightarrow{OJ} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Dessin = {A, B, C, B₁, C₁, A₁, I, J, K, A₂, B₂, C₂}

Les points composés sont A₂, B₂, C₂.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{A_1I} - \overrightarrow{IA_2} = -\overrightarrow{OA_1} + 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA_2} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{B_1J} - \overrightarrow{JB_2} = -\overrightarrow{OB_1} + 2\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OB_2} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{C_1K} - \overrightarrow{KC_2} = -\overrightarrow{OC_1} + 2\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OC_2} \end{aligned}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\overrightarrow{OA_2} = \frac{(-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (\beta - \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{\beta - \alpha}$$

$$\overrightarrow{OA_2} = \frac{(-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (\beta - \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{\beta - \alpha}$$

$$\overrightarrow{OB_2} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OB_2} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC_2} = \beta\overrightarrow{OA} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC_2} = \beta\overrightarrow{OA} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_2B_2}$. On a:

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \frac{(\beta\alpha - \alpha^2)\overrightarrow{OA} + (\alpha - \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (\alpha^2 - \alpha)\overrightarrow{OC}}{\beta - \alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_2C_2}$. On a:

$$\overrightarrow{B_2C_2} = (\beta - \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB} + (\alpha - 1)\overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha} \overrightarrow{B_2C_2}$$

Exercice 3.2.7

Soient 4 points distincts A, B, C, D du plan et E un point situé sur la droite (AB). Soient F ∈ (CD) tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$ et G ∈ (AB) ∩ (CD) qui satisfait les conditions $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EG} = 2 \overrightarrow{EC}$. Soit K le point d'intersection K ∈ (AB) ∩ (DG). Déterminer le réel α tel que $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AB}$ de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{AK} = 2 \overrightarrow{AB}$.

Solution:

Dessin = {A, B, C, D, E, F, G}

Les points purs choisis sont A, B, C.

Les points composés sont D, E, F, G.

On a les découpages successifs:

Points purs
A, B, C

$$\vec{0} = -\alpha \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = (-1 + \alpha)\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$$

$$\vec{0} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} = \frac{-\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OF}}{2}$$

$$\vec{0} = \frac{-1}{3}\vec{BF} + \vec{BG} = \frac{-2\vec{OB} - \vec{OF} + 3\vec{OG}}{3}$$

$$\vec{0} = -2\vec{EC} + \vec{EG} = -2\vec{OC} + \vec{OE} + \vec{OG}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OD} = (-6 + 6\alpha)\vec{OA} + (-4 - 6\alpha)\vec{OB} + 11\vec{OC}$$

$$\vec{OE} = (1 - \alpha)\vec{OA} + \alpha\vec{OB}$$

$$\vec{OF} = (-3 + 3\alpha)\vec{OA} + (-2 - 3\alpha)\vec{OB} + 6\vec{OC}$$

$$\vec{OG} = (-1 + \alpha)\vec{OA} - \alpha\vec{OB} + 2\vec{OC}$$

Dessin = {A, B, C, D, E, F, G, K}

Détermination du point K:

Le point K est composé.

Comme $K \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OK} = \mu_1\vec{OA} + (1 - \mu_1)\vec{OB}$$

On déduit:

$$\vec{OK} = \mu_1\vec{OA} + (1 - \mu_1)\vec{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 0,$$

Comme $K \in (DG)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OK} = \nu_1\vec{OD} + (1 - \nu_1)\vec{OG}$$

On déduit:

$$\vec{OK} = (-1 + \alpha - 5\nu_1 + 5\alpha\nu_1)\vec{OA} + (-\alpha - 4\nu_1 - 5\alpha\nu_1)\vec{OB} + (2 + 9\nu_1)\vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$(-1 + \alpha)(1 + 5\nu_1), \quad -\alpha - 4\nu_1 - 5\alpha\nu_1, \quad 2 + 9\nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{1 - \alpha}{9} \quad \nu_1 = \frac{-2}{9}$$

On déduit que:

$$\vec{OK} = \frac{(1-\alpha)\vec{OA} + (8+\alpha)\vec{OB}}{9}$$

$$\vec{OK} = \frac{(1-\alpha)\vec{OA} + (8+\alpha)\vec{OB}}{9}$$

Donc, avec le choix $O = A$, il vient $\vec{AK} = \frac{8+\alpha\vec{AB}}{9}$. La condition $\vec{AK} = 2\vec{AB}$ implique $\frac{8+\alpha}{9} = 2$ soit $\alpha = 10$.

3.3 Au delà de 3 points purs

Exercice 3.3.1

Soient 4 points distincts A, B, C, D du plan. Un point E situé sur la droite (AB) vérifie $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, un point F situé sur la droite (CD) vérifie $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}$. Proposer une étude du point G défini comme intersection de la droite (EC) et de la droite (FB) . Etudier alors le point $K \in (AB) \cap (DG)$.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F\}$

La liste d'équations vectorielles est:

$$\begin{cases} \frac{-1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{0} \\ \frac{-1}{3} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} \end{cases}$$

On a les découpages successifs:

$$\begin{cases} \frac{-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OE}}{2} = \vec{0} \\ \frac{-2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OF}}{3} = \vec{0} \end{cases}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}$$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont E, F .

Points purs
 A, B, C, D

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G\}$

Détermination du point G :

Le point G est composé.

Comme $G \in (EC)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OG} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC} + \mu_1 \overrightarrow{OE}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mu_1 \overrightarrow{OA} + \mu_1 \overrightarrow{OB} + (2 - 2\mu_1) \overrightarrow{OC}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{\mu_1}{2}, \quad \frac{\mu_1}{2}, \quad 1 - \mu_1, \quad 0$$

Comme $G \in (FB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OG} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB} + \nu_1 \overrightarrow{OF}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{(3 - 3\nu_1)\overrightarrow{OB} + 2\nu_1\overrightarrow{OC} + \nu_1\overrightarrow{OD}}{3}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$0, \quad 1 - \nu_1, \quad \frac{2\nu_1}{3}, \quad \frac{\nu_1}{3}$$

Le système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 qu'il est logique de résoudre est

$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{2} = 0 \\ \frac{\mu_1}{2} = 1 - \nu_1 \\ 1 - \mu_1 = \frac{2\nu_1}{3} \\ 0 = \frac{\nu_1}{3} \end{cases}$$

Ce système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 n'a pas de solutions: donc G n'existe pas, ce qui semble absurde en observant le dessin plan. Ici, nous disposons pour cet exercice plan de 4 points purs et il en résulte que l'une des équations du système linéaire devient incompatible avec les autres équations. Nous n'avons jamais traduit le fait que l'exercice a lieu dans un plan.

On pourrait contourner la difficulté en supprimant un point pur, D par exemple et en imposant une relation du type

$$d_1\overrightarrow{DA} + d_2\overrightarrow{DB} + (1 - d_1 - d_2)\overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

dès le début de l'exercice (d_1 et d_2 désignent 2 constantes arbitraires). Ceci est la démarche de l'utilisation de coordonnées barycentriques.

Nous ne l'utiliserons pas ici et préférons proposer une autre stratégie.

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G\}$

En prenant $O = G$ dans les équations vectorielles intervenant dans l'étude de l'intersection des droites (EC) et (FB) , nous générons une nouvelle liste d'équations vectorielles, qui est:

$$\begin{cases} \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{0} \\ \frac{-1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} + (2 - 2\alpha)\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ (3 - 3\beta)\overrightarrow{GB} + 2\beta\overrightarrow{GC} + \beta\overrightarrow{GD} = \vec{0} \end{cases}$$

On a les découpages successifs:

$$\begin{cases} \frac{-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OE}}{2} = \vec{0} \\ \frac{-2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OF}}{3} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + (2 - 2\alpha)\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OG} = \vec{0} \\ (3 - 3\beta)\overrightarrow{OB} + 2\beta\overrightarrow{OC} + \beta\overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \end{cases}$$

Cette fois, la résolution de ce système d'équations linéaires ne débouche pas sur une impasse. On déduit ainsi les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} - 2 + \alpha + 2\beta \overrightarrow{OB} + (2-2\alpha) \overrightarrow{OC}}{2\beta}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\alpha \overrightarrow{OA} + (-6 + 3\alpha + 6\beta) \overrightarrow{OB} + (6 - 6\alpha - 4\beta) \overrightarrow{OC}}{2\beta}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + (2-2\alpha) \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} - 2 + \alpha + 2\beta \overrightarrow{OB} + (2-2\alpha) \overrightarrow{OC}}{2\beta}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\alpha \overrightarrow{OA} + (-6 + 3\alpha + 6\beta) \overrightarrow{OB}}{2\beta} + \frac{(6 - 6\alpha - 4\beta) \overrightarrow{OC}}{2\beta}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + (2-2\alpha) \overrightarrow{OC}}{2}$$

Les points purs sont dorénavant A, B, C . La résolution du système linéaire a diminué automatiquement le nombre de points purs possibles: cette diminution du nombre de points purs est donc compensée automatiquement par des paramètres α et β .

Les points composés sont D, E, F, G .

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G, K\}$

Détermination du point K :

Le point K est composé.

Comme $K \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OK} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 0$$

Comme $K \in (DG)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1 \overrightarrow{OD} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OG}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= \frac{(\alpha\beta + 3\alpha\nu_1 - \alpha\beta\nu_1) \overrightarrow{OA}}{2\beta} \\ &+ \frac{(\alpha\beta - 6\nu_1 + 3\alpha\nu_1 + 6\beta\nu_1 - \alpha\beta\nu_1) \overrightarrow{OB}}{2\beta} \\ &+ \frac{(2\beta - 2\alpha\beta + 6\nu_1 - 6\alpha\nu_1 - 6\beta\nu_1 + 2\alpha\beta\nu_1) \overrightarrow{OC}}{2\beta} \end{aligned}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{\alpha\beta + 3\alpha\nu_1 - \alpha\beta\nu_1}{2\beta}, \quad \frac{\alpha\beta - 6\nu_1 + 3\alpha\nu_1 + 6\beta\nu_1 - \alpha\beta\nu_1}{2\beta}, \quad \frac{\beta - \alpha\beta + 3\nu_1 - 3\alpha\nu_1 - 3\beta\nu_1 + \alpha\beta\nu_1}{\beta}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-\alpha\beta}{3 - 3\alpha - 3\beta + \alpha\beta} \quad \nu_1 = \frac{-\beta + \alpha\beta}{3 - 3\alpha - 3\beta + \alpha\beta}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-\alpha\beta \overrightarrow{OA} + (3 - 3\alpha - 3\beta + 2\alpha\beta) \overrightarrow{OB}}{3 - 3\alpha - 3\beta + \alpha\beta}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-\alpha\beta \overrightarrow{OA} + (3 - 3\alpha - 3\beta + 2\alpha\beta) \overrightarrow{OB}}{3 - 3\alpha - 3\beta + \alpha\beta}$$

Points purs
 A, B, C

CHAPITRE

4

Théorèmes classiques du plan

Ce chapitre étudie des théorèmes classiques du plan, notamment le théorème de Menelaüs et le théorème de Ceva: nous poursuivons ainsi la méthode mise en oeuvre jusqu'ici.

Ces théorèmes peuvent sembler désuets en regard à leur date d'élaboration, en réalité leur utilité devient évidente pour l'élaboration (ou la simplification) d'une méthode informatique. Par exemple, pour une droite (Δ) rencontrant les côtés (BC), (CA) et (BA) respectivement en A' , B' et C' , le théorème de Menelaüs génère directement un système d'équations vectorielles reliant les points A, B, C aux points A', B', C' . Les équations vectorielles sont d'emblée:

$$\alpha \overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'B} = \vec{0}$$

$$\beta \overrightarrow{B'A} - \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{C'A} - \alpha\beta \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$$

en raison de la formule

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

Cette formule est facile à mémoriser en écrivant les 2 lignes

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & A & B & \dots \\ B & C & A & B & C & \dots \end{array}$$

et en visualisant chaque colonne (par exemple $[\frac{B}{C}]$) pour obtenir la fraction correspondante (ici $\frac{A'B}{A'C}$). Le théorème de Menelaüs est en fait valable dans un espace affine de dimension n .

Le théorème de Ceva offre les mêmes avantages que le théorème de Menelaüs: il semble n'être connu que dans le cas du plan. La méthode informatique nous permettra d'obtenir la formulation et la démonstration de ce théorème dans un espace quelconque (de dimension n): nous renvoyons au chapitre 9.

4.1 Division harmonique et Quadrilatère complet

Exercice 4.1.1 (*Division harmonique*)

Soit $ABCD$ un trapèze convexe. Les côtés non parallèles (AD) et (BC) se coupent en E . On désigne par F le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) . Soient N (resp. M) le point d'intersection de la droite (EF) avec la droite (DC) (resp. (AB)). Montrer que:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}} = -\frac{\overline{FM}}{\overline{FN}}$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D\}$

Les points purs choisis sont A, B, D .

Le point C se trouve sur une droite parallèle à la droite (AB) passant par D , il ne peut donc être dessiné n'importe où dans le plan. Il est donc composé et associé à une formule vectorielle du type $\overrightarrow{DC} = \alpha \overrightarrow{AB}$ où α n'est pas une inconnue.

Points purs
 A, B, D

Déterminons le point composé C . On a le découpage:

$$\overrightarrow{0} = -\alpha \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \alpha \overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

On déduit la description:

$$\overrightarrow{OC} = -\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, E\}$

Détermination du point E :

Le point E est composé comme intersection de 2 droites.

Comme $E \in (AD)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OE} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\mu_1, \quad 0, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $E \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OE} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OE} = (-\alpha + \alpha\nu_1) \overrightarrow{OA} + (\alpha + \nu_1 - \alpha\nu_1) \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\alpha(-1 + \nu_1), \quad \alpha + \nu_1 - \alpha\nu_1, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} \quad \nu_1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}}{-1+\alpha}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}}{-1+\alpha}$$

Dessin = {A, B, C, D, E, F}

Détermination du point F:

Le point F est composé.

Comme $F \in (AC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OF} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF} = (-\alpha + \mu_1 + \alpha\mu_1) \overrightarrow{OA} + (\alpha - \alpha\mu_1) \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$-\alpha + \mu_1 + \alpha\mu_1, \quad \alpha(1 - \mu_1), \quad 1 - \mu_1$$

Comme $F \in (BD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OF} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1,$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad \nu_1 = \frac{2\alpha - \alpha(1 + \alpha)}{-1 - \alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{1+\alpha}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{1+\alpha}$$

Dessin = {A, B, C, D, E, F, N}

Détermination du point N:

Le point N est composé.

Comme $N \in (DC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC} + \mu_1 \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = (-\alpha + \alpha\mu_1) \overrightarrow{OA} + (\alpha - \alpha\mu_1) \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$-\alpha + \alpha\mu_1, \quad \alpha - \alpha\mu_1, \quad 1$$

Comme $N \in (EF)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1 \overrightarrow{OE} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OF}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\alpha\nu_1(1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha(-1 + \alpha)(1 - \nu_1)\overrightarrow{OB} + (-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1)\overrightarrow{OD}}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\frac{\alpha\nu_1}{-1 + \alpha}, \quad \frac{\alpha(1 - \nu_1)}{1 + \alpha}, \quad \frac{-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad \nu_1 = \frac{(1 - \alpha)}{2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{-\alpha\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{-\alpha\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, N, M\}$

Détermination du point M:

Le point M est composé.

Comme $M \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 0,$$

Comme $M \in (EF)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM} = \nu_1 \overrightarrow{OE} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OF}$$

En utilisant le calcul précédent relatif à \overrightarrow{ON} , on déduit:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha\nu_1(1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha(-1 + \alpha)(1 - \nu_1)\overrightarrow{OB} + (-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1)\overrightarrow{OD}}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\frac{\alpha\nu_1}{-1 + \alpha}, \quad \frac{\alpha(1 - \nu_1)}{1 + \alpha}, \quad \frac{-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \alpha}{2\alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{EM} . On a :

$$\overrightarrow{EM} = \frac{(-1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + (-1 + \alpha)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}}{2(-1 + \alpha)}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{EN} . On a :

$$\overrightarrow{EN} = \frac{(-\alpha - \alpha^2)\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha^2)\overrightarrow{OB} + 2\alpha\overrightarrow{OD}}{2(-1 + \alpha)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{EN}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{FM} . On a :

$$\overrightarrow{FM} = \frac{(1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OD}}{2(1 + \alpha)}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{FN} . On a :

$$\overrightarrow{FN} = \frac{(-\alpha - \alpha^2)\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha^2)\overrightarrow{OB} + 2\alpha\overrightarrow{OD}}{2(1 + \alpha)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{FM} = \frac{-1}{\alpha}\overrightarrow{FN}$$

Exercice 4.1.2 (*Quadrilatère complet*)

Soit ABC un triangle et une droite (Δ) qui coupe les côtés (BC) , (CA) et (BA) respectivement en A_1 , B_1 et C_1 . On désigne par I , J , K les milieux respectifs des segments $[A, A_1]$, $[B, B_1]$, $[C, C_1]$.

Montrer que les points I , J , K sont alignés.

Un quadrilatère complet est la donné d'un triangle et d'une droite coupant les 3 côtés du triangle. Ainsi, dans un quadrilatère complet, les milieux des segments diagonaux sont alignés.

Solution:

La droite (Δ) s'identifie à la droite B_1, C_1 , les points B_1 et C_1 étant placés arbitrairement sur chacune des droites GA et GB .

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont B_1, C_1 .

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB_1} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB_1}$$

Points purs
 A, B, C

$$\vec{0} = \beta \vec{AB} - \vec{AC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} - \vec{OC}_1$$

avec α et β constantes arbitraires.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, A_1\}$

Détermination du point A_1 :

Le point A_1 est composé.

Comme $A_1 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OA}_1 = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \mu_1, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $A_1 \in (B_1C_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\vec{OA}_1 = \nu_1 \vec{OB}_1 + (1 - \nu_1) \vec{OC}_1$$

On déduit:

$$\vec{OA}_1 = (1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\nu_1) \vec{OB} + \alpha\nu_1 \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1, \quad -\beta(-1 + \nu_1), \quad \alpha\nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\beta - \beta\alpha}{\beta - \alpha} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \beta}{\beta - \alpha}$$

On déduit que:

$$\vec{OA}_1 = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

$$\vec{OA}_1 = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, A_1, I, J, K\}$

Les points I, J, K sont composés.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{AI} - \vec{IA}_1 &= -\vec{OA} - \vec{OA}_1 + 2\vec{OI} \\ \vec{0} &= \vec{BJ} - \vec{JB}_1 &= -\vec{OB} - \vec{OB}_1 + 2\vec{OJ} \\ \vec{0} &= \vec{CK} - \vec{KC}_1 &= -\vec{OC} - \vec{OC}_1 + 2\vec{OK} \end{aligned}$$

Points purs
 A, B, C

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \vec{AI} - \vec{IA_1} = \frac{(-\beta + \alpha)\vec{OA} + (-\beta + \beta\alpha)\vec{OB} + (\alpha - \beta\alpha)\vec{OC} + (2\beta - 2\alpha)\vec{OI}}{\beta - \alpha}$$

$$\vec{0} = \vec{BJ} - \vec{JB_1} = (-1 + \alpha)\vec{OA} - \vec{OB} - \alpha\vec{OC} + 2\vec{OJ}$$

$$\vec{0} = \vec{CK} - \vec{KC_1} = (-1 + \beta)\vec{OA} - \beta\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OK}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OI} = \frac{(\beta - \alpha)\vec{OA} + (\beta - \beta\alpha)\vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\vec{OC}}{2(\beta - \alpha)}$$

$$\vec{OJ} = \frac{(1-\alpha)\vec{OA} + \vec{OB} + \alpha\vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OK} = \frac{(1-\beta)\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OI} = \frac{(\beta-\alpha)\vec{OA} + (\beta-\beta\alpha)\vec{OB}}{2(\beta-\alpha)}$$

$$+ \frac{(-\alpha+\beta\alpha)\vec{OC}}{2(\beta-\alpha)}$$

$$\vec{OJ} = \frac{(1-\alpha)\vec{OA} + \vec{OB} + \alpha\vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OK} = \frac{(1-\beta)\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{JK} . On a:

$$\vec{JK} = \frac{(-\beta + \alpha)\vec{OA} + (\beta - 1)\vec{OB} + (1 - \alpha)\vec{OC}}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{IK} . On a:

$$\vec{IK} = \frac{(-\beta^2 + \beta\alpha)\vec{OA} + (-\beta + \beta^2)\vec{OB} + (\beta - \beta\alpha)\vec{OC}}{2(\beta - \alpha)}$$

On a ainsi

$$\vec{JK} = \frac{\beta - \alpha}{\beta} \vec{IK}$$

4.2 Théorèmes de Menelaüs et de Ceva

Exercice 4.2.1 (Menelaüs dans le plan)

Soit un triangle ABC et une droite (Δ) qui coupe les côtés (BC) , (CA) et (BA) respectivement en A' , B' et C' . Montrer que:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, B', C'\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont B', C' .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha \vec{AC} - \vec{AB}' = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} - \vec{OB}' \\ \vec{0} &= \beta \vec{AB} - \vec{AC}' = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} - \vec{OC}'\end{aligned}$$

avec α et β constantes arbitraires.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned}\vec{OB}' &= (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} & \vec{OB}' &= (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} \\ \vec{OC}' &= (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} & \vec{OC}' &= (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}\end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, B', C', A'\}$

Détermination du point A' :

Le point A' est composé.

Comme $A' \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OA}' = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \mu_1, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $A' \in (B'C')$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\vec{OA}' = \nu_1 \vec{OB}' + (1 - \nu_1) \vec{OC}'$$

On déduit:

$$\vec{OA}' = (1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\nu_1) \vec{OB} + \alpha\nu_1 \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1, \quad -\beta(-1 + \nu_1), \quad \alpha\nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\beta - \beta\alpha}{\beta - \alpha} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \beta}{\beta - \alpha}$$

On déduit que:

$$\vec{OA}' = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha} \qquad \vec{OA}' = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

Calculons le vecteur $\vec{A'B}$. On a:

$$\vec{A'B} = \frac{(-\alpha + \beta\alpha) \vec{OB} + (\alpha - \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A'C}$. On a:

$$\overrightarrow{A'C} = \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (\beta - \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{\beta - \alpha}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A'B} = \frac{(-1 + \beta)\alpha}{\beta(-1 + \alpha)} \overrightarrow{A'C}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B'C}$. On a:

$$\overrightarrow{B'C} = (-1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B'A}$. On a:

$$\overrightarrow{B'A} = \alpha\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{B'C} = \frac{-1 + \alpha}{\alpha} \overrightarrow{B'A}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C'A}$. On a:

$$\overrightarrow{C'A} = \beta\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C'B}$. On a:

$$\overrightarrow{C'B} = (-1 + \beta)\overrightarrow{OA} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{C'A} = \frac{\beta}{-1 + \beta} \overrightarrow{C'B}$$

On a donc

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1$$

Exercice 4.2.2 (*Théorème de Ceva*)

Soient 3 points A, B, C non-alignés et M un point du plan (ABC) . On suppose que:

les droites (AM) et (BC) sont sécantes en un point A_1 différent de C

les droites (BM) et (CA) sont sécantes en un point B_1 différent de A

les droites (CM) et (AB) sont sécantes en un point C_1 différent de B

Démontrer que:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1$$

Solution:**Dessin** = $\{A, B, C, B_1, C_1\}$ Les points purs choisis sont A, B, C .Les points composés sont B_1, C_1 .

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha \vec{AC} - \vec{AB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} - \vec{OB}_1 \\ \vec{0} &= \beta \vec{AB} - \vec{AC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} - \vec{OC}_1\end{aligned}$$

avec α et β constantes arbitraires.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

Points purs

 A, B, C

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, M\}$ Détermination du point M:Le point M est composé.Comme $M \in (BB_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OM} = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OB}_1$$

On déduit:

$$\vec{OM} = (1 - \alpha - \mu_1 + \alpha\mu_1) \vec{OA} + \mu_1 \vec{OB} + (\alpha - \alpha\mu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$(-1 + \alpha)(-1 + \mu_1), \quad \mu_1, \quad -\alpha(-1 + \mu_1)$$

Comme $M \in (CC_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\vec{OM} = \nu_1 \vec{OC} + (1 - \nu_1) \vec{OC}_1$$

On déduit:

$$\vec{OM} = (1 - \beta - \nu_1 + \beta\nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\nu_1) \vec{OB} + \nu_1 \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$(-1 + \beta)(-1 + \nu_1), \quad -\beta(-1 + \nu_1), \quad \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-\beta + \beta\alpha}{-1 + \beta\alpha} \quad \nu_1 = \frac{-\alpha + \beta\alpha}{-1 + \beta\alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha)\overrightarrow{OA} + (-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-1 + \beta\alpha}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{(-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha)\overrightarrow{OA}}{-1 + \beta\alpha} \\ &+ \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB}}{-1 + \beta\alpha} \\ &+ \frac{(-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-1 + \beta\alpha} \end{aligned}$$

Dessin = {A, B, C, B₁, C₁, M, A₁}

Détermination du point A₁:

Le point A₁ est composé.

Comme A₁ ∈ (AM), on a, en choisissant l'inconnue μ₁

$$\overrightarrow{OA_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{(-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha - \beta\mu_1 - \alpha\mu_1 + 2\beta\alpha\mu_1)\overrightarrow{OA} - (-\beta + \beta\alpha)(-1 + \mu_1)\overrightarrow{OB} - (-1 + \beta)\alpha(-1 + \mu_1)\overrightarrow{OC}}{-1 + \beta\alpha}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha - \beta\mu_1 - \alpha\mu_1 + 2\beta\alpha\mu_1}{-1 + \beta\alpha}, \quad \frac{-(-\beta + \beta\alpha)(-1 + \mu_1)}{-1 + \beta\alpha}, \quad \frac{-(-1 + \beta)\alpha(-1 + \mu_1)}{-1 + \beta\alpha}$$

Comme A₁ ∈ (BC), on a, en choisissant l'inconnue ν₁

$$\overrightarrow{OA_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1,$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ₁, ν₁ donne

$$\nu_1 = \frac{-\beta + \beta\alpha}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha} \quad \mu_1 = \frac{1 - \beta - \alpha + \beta\alpha}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha} \quad \overrightarrow{OA_1} = \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1B}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{(-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (\alpha - \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1C}$. On a :

$$\overrightarrow{A_1C} = \frac{(\beta - \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{\alpha - \beta\alpha}{\beta(-1 + \alpha)} \overrightarrow{A_1C}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_1C}$. On a :

$$\overrightarrow{B_1C} = (-1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_1A}$. On a :

$$\overrightarrow{B_1A} = \alpha\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{B_1C} = \frac{-1 + \alpha}{\alpha} \overrightarrow{B_1A}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C_1A}$. On a :

$$\overrightarrow{C_1A} = \beta\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C_1B}$. On a :

$$\overrightarrow{C_1B} = (-1 + \beta)\overrightarrow{OA} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{C_1A} = \frac{\beta}{-1 + \beta} \overrightarrow{C_1B}$$

On a ainsi

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}} \frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\alpha(1 - \beta)}{\beta(-1 + \alpha)} \frac{-1 + \alpha}{\alpha} \frac{\beta}{-1 + \beta} = -1$$

Exercice 4.2.3 (*Réciproque du Théorème de Ceva*)

Soient 3 points A_1, B_1, C_1 distincts des sommets d'un triangle ABC et appartenant respectivement aux côtés (BC) , (CA) et (AB) . On suppose que :

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}} \frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1$$

Montrer que les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) sont, soit parallèles, soit concourantes.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, A_1, B_1, C_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont A_1, B_1, C_1 .

Posons $\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} = \gamma_1$ et $\frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}} = \gamma_2$ avec $\gamma_1 \neq 1$ et $\gamma_2 \neq 1$.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{A_1B} - \gamma_1 \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{OB} - \gamma_1 \overrightarrow{OC} + (-1 + \gamma_1) \overrightarrow{OA_1} \\ \vec{0} &= -\gamma_2 \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1C} = -\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + (-1 + \gamma_2) \overrightarrow{OB_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{C_1A} + \frac{1}{\gamma_1\gamma_2} \overrightarrow{C_1B} = \frac{\gamma_1\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (-1 - \gamma_1\gamma_2) \overrightarrow{OC_1}}{\gamma_1\gamma_2} \end{aligned}$$

Points purs
 A, B, C

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{-\overrightarrow{OB} + \gamma_1 \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\gamma_2 \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\gamma_1\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1 + \gamma_1\gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{-\overrightarrow{OB} + \gamma_1 \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\gamma_2 \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\gamma_1\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1 + \gamma_1\gamma_2}$$

avec $\gamma_1\gamma_2 \neq -1$ car $A \neq B$ est distinct.

Nous posons $M = (AA_1) \cap (BB_1)$ et $N = (AA_1) \cap (CC_1)$.

Dessin = $\{A, B, C, A_1, B_1, C_1, M\}$

Détermination du point M:

Le point M est composé.

Comme $M \in (AA_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(-\mu_1 + \gamma_1\mu_1) \overrightarrow{OA} + (-1 + \mu_1) \overrightarrow{OB} + (\gamma_1 - \gamma_1\mu_1) \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad \frac{-1 + \mu_1}{-1 + \gamma_1}, \quad \frac{\gamma_1(1 - \mu_1)}{-1 + \gamma_1}$$

Comme $M \in (BB_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_2\nu_1) \overrightarrow{OA} + (-\nu_1 + \gamma_2\nu_1) \overrightarrow{OB} + (-1 + \nu_1) \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{\gamma_2(1 - \nu_1)}{-1 + \gamma_2}, \quad \nu_1, \quad \frac{-1 + \nu_1}{-1 + \gamma_2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\gamma_1\gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2} \quad \nu_1 = \frac{1}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

Dessin = $\{A, B, C, A_1, B_1, C_1, M, N\}$

Détermination du point N :

Le point N est composé.

Comme $N \in (AA_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON} = \mu_1\overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1)\overrightarrow{OA_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{(-\mu_1 + \gamma_1\mu_1)\overrightarrow{OA} + (-1 + \mu_1)\overrightarrow{OB} + (\gamma_1 - \gamma_1\mu_1)\overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad \frac{-1 + \mu_1}{-1 + \gamma_1}, \quad \frac{\gamma_1(1 - \mu_1)}{-1 + \gamma_1}$$

Comme $N \in (CC_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1)\overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\nu_1)\overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1)\overrightarrow{OB} + \nu_1(1 + \gamma_1\gamma_2)\overrightarrow{OC}}{1 + \gamma_1\gamma_2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{\gamma_1\gamma_2(1 - \nu_1)}{1 + \gamma_1\gamma_2}, \quad \frac{1 - \nu_1}{1 + \gamma_1\gamma_2}, \quad \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\gamma_1\gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

En résumé, lorsque $1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 \neq 0$, on a $M = N$, donc les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) sont concourantes.

Supposons maintenant que $1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = 0$ donc $\gamma_1 = \frac{1}{(1-\gamma_2)}$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{-\gamma_2\overrightarrow{OA} + (-1 + \gamma_2)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{\gamma_2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BB_1}$. On a:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{\gamma_2\overrightarrow{OA} + (1 - \gamma_2)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2} \overrightarrow{BB_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{-\gamma_2\overrightarrow{OA} - (1 - \gamma_2)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{\gamma_2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{CC_1}$. On a:

$$\overrightarrow{CC_1} = \gamma_2\overrightarrow{OA} + (1 - \gamma_2)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{-1}{\gamma_2} \overrightarrow{CC_1}$$

et $\gamma_2 \neq 0$ car $B_1 \neq C$.

En résumé, lorsque $1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = 0$, les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) sont parallèles.

4.3 Une formule originale

Exercice 4.3.1

Soit ABC un triangle et I un point du plan n'appartenant à aucune des droites (AB) , (AC) , (BC) . Les droites qui joignent les sommets A, B, C du triangle au point I coupent les côtés opposés aux points A', B', C' respectivement.

Démontrer la relation

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

Solution:

Dessin = {A, B, C, B', C'}

Les points purs choisis sont A, B, C.

Les points composés sont B', C'.

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \vec{B'A} - \alpha \vec{B'C} = \vec{OA} - \alpha \vec{OC} + (-1 + \alpha) \vec{OB'}$$

$$\vec{0} = \vec{C'A} - \beta \vec{C'B} = \vec{OA} - \beta \vec{OB} + (-1 + \beta) \vec{OC'}$$

Points purs
A, B, C

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OB'} = \frac{-\vec{OA} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha}$$

$$\vec{OB'} = \frac{-\vec{OA} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha}$$

$$\vec{OC'} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB}}{-1 + \beta}$$

$$\vec{OC'} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB}}{-1 + \beta}$$

Dessin = {A, B, C, B', C', I}

Détermination du point I:

Le point I est composé.

Comme $I \in (BB')$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OI} = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OB'}$$

On déduit:

$$\vec{OI} = \frac{(-1 + \mu_1) \vec{OA} + (-\mu_1 + \alpha \mu_1) \vec{OB} + (\alpha - \alpha \mu_1) \vec{OC}}{-1 + \alpha}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \mu_1}{-1 + \alpha}, \quad \mu_1, \quad \frac{-\alpha(-1 + \mu_1)}{-1 + \alpha}$$

Comme $I \in (CC')$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OI} = \nu_1 \vec{OC} + (1 - \nu_1) \vec{OC'}$$

On déduit:

$$\vec{OI} = \frac{(-1 + \nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta \nu_1) \vec{OB} + (-\nu_1 + \beta \nu_1) \vec{OC}}{-1 + \beta}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \nu_1}{-1 + \beta}, \quad \frac{-\beta(-1 + \nu_1)}{-1 + \beta}, \quad \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\beta}{-1 + \alpha + \beta} \quad \nu_1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha + \beta}$$

On déduit que:

$$\vec{OI} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

$$\vec{OI} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

(l'existence du point I implique que $\alpha + \beta \neq 1$)

Dessin = $\{A, B, C, B', C', I, A'\}$

Détermination du point A' :

Le point A' est composé.

Comme $A' \in (AI)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OA'} = \mu_1 \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OI}$$

On déduit:

$$\vec{OA'} = \frac{(-1 + \alpha\mu_1 + \beta\mu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\mu_1) \vec{OB} + (\alpha - \alpha\mu_1) \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \alpha\mu_1 + \beta\mu_1}{-1 + \alpha + \beta}, \quad \frac{-\beta(-1 + \mu_1)}{-1 + \alpha + \beta}, \quad \frac{-\alpha(-1 + \mu_1)}{-1 + \alpha + \beta}$$

Comme $A' \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OA'} = \nu_1 \vec{OB} + (1 - \nu_1) \vec{OC}$$

On déduit:

$$\vec{OA'} = \nu_1 \vec{OB} + (1 - \nu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\nu_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad \mu_1 = \frac{-1}{-\alpha - \beta}$$

On déduit que:

$$\vec{OA'} = \frac{\beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{\alpha + \beta}$$

$$\vec{OA'} = \frac{\beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{\alpha + \beta}$$

Calculons le vecteur \vec{IA} . On a:

$$\vec{IA} = \frac{(\alpha + \beta) \vec{OA} - \beta \vec{OB} - \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

Calculons le vecteur $\vec{IA'}$. On a:

$$\vec{IA'} = \frac{(\alpha + \beta) \vec{OA} - \beta \vec{OB} - \alpha \vec{OC}}{(-1 + \alpha + \beta)(\alpha + \beta)}$$

On a ainsi

$$\vec{IA} = (\alpha + \beta) \vec{IA'}$$

qui est la relation demandée.

CHAPITRE

5

*Intersections dans l'espace*5.1 Intersections dans l'espace usuel \mathbb{R}^3

Une droite ou un plan de l'espace est appelé un **sous-espace affine**: l'intersection de sous-espaces affines dans l'espace est donc l'intersection de droites ou plans avec des droites ou plans.

Soit un point I situé sur l'intersection de 2 sous-espaces affines quelconques. Une première équation vectorielle traduira l'appartenance du point I au premier sous-espace affine, une seconde équation vectorielle traduira l'appartenance du point I au second sous-espace affine, et la troisième condition sera l'égalité des 2 expressions de \overrightarrow{OI} . Cette dernière équation génère un système linéaire en affirmant que les deux listes de coefficients indéterminés (apparaissant dans chacune des descriptions de \overrightarrow{OI} en fonction des points purs) doivent être identiques: la résolution de ce système linéaire adapte alors les coefficients les uns par rapport aux autres, ou alors les détermine de façon exacte. Ainsi, en substituant dans l'une des expressions de \overrightarrow{OI} , on obtient l'expression du point I en fonction des points purs (le nombre de points purs doit être limité à 4 pour de tels exercices).

5.2 Exemples

Exercice 5.2.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre et les points M, N, P définis par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \quad , \quad \overrightarrow{CP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CD}$$

Déterminer le point d'intersection J du plan (MNP) avec la droite (AD) .

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, M, N, P\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont M, N, P .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \frac{-1}{2} \vec{AB} + \vec{AM} = \frac{-\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OM}}{2} \\ \vec{0} &= \frac{-1}{3} \vec{BC} + \vec{BN} = \frac{-2\vec{OB} - \vec{OC} + 3\vec{ON}}{3} \\ \vec{0} &= \frac{-1}{4} \vec{CD} + \vec{CP} = \frac{-3\vec{OC} - \vec{OD} + 4\vec{OP}}{4}\end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} & \vec{OM} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \\ \vec{ON} &= \frac{2\vec{OB} + \vec{OC}}{3} & \vec{ON} &= \frac{2\vec{OB} + \vec{OC}}{3} \\ \vec{OP} &= \frac{3\vec{OC} + \vec{OD}}{4} & \vec{OP} &= \frac{3\vec{OC} + \vec{OD}}{4}\end{aligned}$$

Dessin = {A, B, C, D, M, N, P, J}

Détermination du point J :

Soit J le point $(AD) \cap (MNP)$. Ce point J est composé.

Comme $J \in (AD)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OJ} = \mu_1 \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\mu_1, \quad 0, \quad 0, \quad 1 - \mu_1,$$

Comme $J \in (MNP)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\vec{OJ} = \nu_1 \vec{OM} + \nu_2 \vec{ON} + (1 - \nu_1 - \nu_2) \vec{OP}$$

On déduit:

$$\vec{OJ} = \frac{6\nu_1 \vec{OA} + (6\nu_1 + 8\nu_2) \vec{OB} + (9 - 9\nu_1 - 5\nu_2) \vec{OC} + (3 - 3\nu_1 - 3\nu_2) \vec{OD}}{12}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{\nu_1}{2}, \quad \frac{3\nu_1 + 4\nu_2}{6}, \quad \frac{9 - 9\nu_1 - 5\nu_2}{12}, \quad \frac{1 - \nu_1 - \nu_2}{4}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{6}{7} \quad \nu_1 = \frac{12}{7} \quad \nu_2 = \frac{-9}{7}$$

On déduit que:

$$\vec{OJ} = \frac{6\vec{OA} + \vec{OD}}{7} \qquad \vec{OJ} = \frac{6\vec{OA} + \vec{OD}}{7}$$

Exercice 5.2.2

Soit $ABCD$ un tétraèdre, α un réel fixe et I, J les points de (A, B) et (C, D) définis par

$$\overrightarrow{AI} = \alpha \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CJ} = \alpha \overrightarrow{CD}$$

On construit les parallélogrammes $IACE$ et $IBDF$. Montrer que les points E, F, J sont alignés.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, I, J\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont I, J .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = -\alpha \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} = (\alpha - 1)\overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OI}$$

$$\vec{0} = -\alpha \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CJ} = (\alpha - 1)\overrightarrow{OC} - \alpha \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OJ}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OI} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OI} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OJ} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OC} + \alpha \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OJ} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OC} + \alpha \overrightarrow{OD}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, I, J, E, F\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont E, F .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = -\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OI}$$

$$\vec{0} = -\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OJ}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = -\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{IA} = \alpha \overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$$

$$\vec{0} = -\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{IB} = (-1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OE} = -\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OE} = -\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OF} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + (-1 + \alpha)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{EF} . On a:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OF} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + (-1 + \alpha)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{EJ} . On a:

$$\overrightarrow{EJ} = \alpha \overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OB} - \alpha \overrightarrow{OC} + \alpha \overrightarrow{OD}$$

On a donc $\overrightarrow{EJ} = \alpha \overrightarrow{EF}$.

Exercice 5.2.3

On considère dans l'espace un parallélépipède $ABCD A' B' C' D'$ (on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ et la figure $ABCD$ est un parallélogramme). Soit I le milieu du parallélogramme $A' B' C' D'$.

1. Déterminer l'intersection K de la droite (DI) et du plan (ACD') .
2. Déterminer l'intersection de la droite (BI) et du plan (ACD') .

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, A', C', D, B', D', I\}$

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{A'I} - \overrightarrow{IC'} &= -\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OC'} + 2\overrightarrow{OI} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{DD'} &= -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OD'} \end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire détermine les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC'} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} & \overrightarrow{OC'} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB'} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'} & \overrightarrow{OB'} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{OD'} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} & \overrightarrow{OD'} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{OI} &= \frac{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA'}}{2} & \overrightarrow{OI} &= \frac{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA'}}{2} \end{aligned}$$

Les points purs choisis sont donc A, B, C, A' .

Les points composés sont C', D, B', D', I .

Question 1):

Dessin = $\{A, B, C, A', C', D, B', D', I, K\}$

Détermination du point K :

Soit K le point $(DI) \cap (ACD')$. Le point K est composé.

Comme $K \in (DI)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OK} = \mu_1 \overrightarrow{OD} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OI}$$

Points purs
 A, B, C, A'

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(-1 + 3\mu_1)\overrightarrow{OA} - 2\mu_1\overrightarrow{OB} + (1 + \mu_1)\overrightarrow{OC} + (2 - 2\mu_1)\overrightarrow{OA'}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, A'

$$\frac{-1 + 3\mu_1}{2}, \quad -\mu_1, \quad \frac{1 + \mu_1}{2}, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $K \in (ACD')$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1\overrightarrow{OA} + \nu_2\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{OD'}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1\overrightarrow{OA} + (-1 + \nu_1 + \nu_2)\overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1)\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{OA'}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, A'

$$\nu_1, \quad -1 + \nu_1 + \nu_2, \quad 1 - \nu_1, \quad 1 - \nu_1 - \nu_2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad \nu_1 = \frac{1}{4} \quad \nu_2 = \frac{1}{4}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA'}}{4}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA'}}{4}$$

Question 2):

Dessin = $\{A, B, C, A', C', D, B', D', I, K, L\}$

Détermination du point L :

Soit L le point $(BI) \cap (ACD')$. Ce point est composé.

Comme $L \in (BI)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL} = \mu_1\overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1)\overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL} = \frac{(-1 + \mu_1)\overrightarrow{OA} + 2\mu_1\overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1)\overrightarrow{OC} + (2 - 2\mu_1)\overrightarrow{OA'}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, A'

$$\frac{-1 + \mu_1}{2}, \quad \mu_1, \quad \frac{1 - \mu_1}{2}, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $L \in (ACD')$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\overrightarrow{OL} = \nu_1\overrightarrow{OA} + \nu_2\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{OD'}$$

On déduit:

$$\vec{OL} = \nu_1 \vec{OA} + (-1 + \nu_1 + \nu_2) \vec{OB} + (1 - \nu_1) \vec{OC} + (1 - \nu_1 - \nu_2) \vec{OA}'$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, A'

$$\nu_1, \quad -1 + \nu_1 + \nu_2, \quad 1 - \nu_1, \quad 1 - \nu_1 - \nu_2$$

Le système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 n'a pas de solutions. On déduit que $(BI) \cap (ACD') = \emptyset$. La droite (BI) est donc parallèle au plan (ACD') .

Exercice 5.2.4

Soit $ABCD$ un tétraèdre et les points M, N, P définis par

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{AC} \quad , \quad \vec{BN} = \frac{1}{3} \vec{BC} + \vec{AB} \quad , \quad \vec{CP} = \frac{1}{4} \vec{CD} + \vec{NM}$$

Déterminer le point d'intersection J du plan (MNP) avec la droite (AD) .

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, M, N, P\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont M, N, P .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \frac{-1}{2} \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AM} = \frac{-3\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OC} + 2\vec{OM}}{2}$$

$$\vec{0} = -\vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{BC} + \vec{BN} = \frac{3\vec{OA} - 5\vec{OB} - \vec{OC} + 3\vec{ON}}{3}$$

$$\vec{0} = \frac{-1}{4} \vec{CD} + \vec{CP} + \vec{MN} = \frac{-3\vec{OC} - \vec{OD} - 4\vec{OM} + 4\vec{ON} + 4\vec{OP}}{4}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OM} = \frac{3\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OM} = \frac{3\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}}{2}$$

$$\vec{ON} = \frac{-3\vec{OA} + 5\vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\vec{ON} = \frac{-3\vec{OA} + 5\vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\vec{OP} = \frac{30\vec{OA} - 14\vec{OB} - 7\vec{OC} + 3\vec{OD}}{12}$$

$$\vec{OP} = \frac{30\vec{OA} - 14\vec{OB} - 7\vec{OC} + 3\vec{OD}}{12}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, M, N, P, J\}$

Détermination du point J :

Soit J le point $(AD) \cap (MNP)$. Ce point J est composé.

Comme $J \in (AD)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OJ} = \mu_1 \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\mu_1, \quad 0, \quad 0, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $J \in (MNP)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\vec{OJ} = \nu_1 \vec{OM} + \nu_2 \vec{ON} + (1 - \nu_1 - \nu_2) \vec{OP}$$

On déduit:

$$\vec{OJ} = \frac{(30 - 12\nu_1 - 42\nu_2) \vec{OA} + (-14 + 20\nu_1 + 34\nu_2) \vec{OB} + (-7 - 5\nu_1 + 11\nu_2) \vec{OC} + (3 - 3\nu_1 - 3\nu_2) \vec{OD}}{12}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{5 - 2\nu_1 - 7\nu_2}{2}, \quad \frac{-7 + 10\nu_1 + 17\nu_2}{6}, \quad \frac{-7 - 5\nu_1 + 11\nu_2}{12}, \quad \frac{1 - \nu_1 - \nu_2}{4}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{54}{65} \quad \nu_1 = \frac{-14}{65} \quad \nu_2 = \frac{7}{13}$$

On déduit que:

$$\vec{OJ} = \frac{54\vec{OA} + 11\vec{OD}}{65} \qquad \vec{OJ} = \frac{54\vec{OA} + 11\vec{OD}}{65}$$

Exercice 5.2.5

On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ (on a $\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$ et la figure $ABCD$ est un parallélogramme). Soit K le centre de gravité du triangle BDE .

1. Montrer que K est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) .
2. Déterminer l'intersection L de la droite (AG) et du plan (CFH) .

Solution:

Dessin = $\{A, B, D, E, G, C, F, H\}$

Les points purs choisis sont A, B, D, E .

Les points composés sont G, C, F, H .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, D, E

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AD} &= -\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} + \vec{OD} \\ \vec{0} &= \vec{AE} - \vec{BF} &= -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OE} - \vec{OF} \\ \vec{0} &= \vec{BF} - \vec{CG} &= -\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OF} - \vec{OG} \\ \vec{0} &= \vec{CG} - \vec{DH} &= -\vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OG} - \vec{OH} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OG} = -2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE}$$

$$\vec{OG} = \frac{-2\vec{OA} + \vec{OB}}{\vec{OD} + \vec{OE}}$$

$$\vec{OC} = -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}$$

$$\vec{OF} = -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OE}$$

$$\vec{OH} = -\vec{OA} + \vec{OD} + \vec{OE}$$

$$\vec{OC} = -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}$$

$$\vec{OH} = -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OE}$$

Dessin = {A, B, D, E, G, C, F, H, K}

Détermination du point K :

Le point K est composé.

Comme $K \in (AG)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OK} = \mu_1 \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OG}$$

On déduit:

$$\vec{OK} = (-2 + 3\mu_1) \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OD} + (1 - \mu_1) \vec{OE}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D, E

$$-2 + 3\mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $K \in (BDE)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\vec{OK} = \nu_1 \vec{OB} + \nu_2 \vec{OD} + (1 - \nu_1 - \nu_2) \vec{OE}$$

On déduit:

$$\vec{OK} = \nu_1 \vec{OB} + \nu_2 \vec{OD} + (1 - \nu_1 - \nu_2) \vec{OE}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D, E

$$0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad 1 - \nu_1 - \nu_2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{2}{3} \quad \nu_1 = \frac{1}{3} \quad \nu_2 = \frac{1}{3}$$

On déduit que:

$$\vec{OK} = \frac{\vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE}}{3}$$

$$\vec{OK} = \frac{\vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE}}{3}$$

Dessin = {A, B, D, E, G, C, F, H, K, L}

Détermination du point L:

Le point L est composé.

Comme $L \in (AG)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OL} = \mu_1 \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OG}$$

On déduit:

$$\vec{OL} = (-2 + 3\mu_1) \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OD} + (1 - \mu_1) \vec{OE}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D, E

$$-2 + 3\mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $L \in (CFH)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\vec{OL} = \nu_1 \vec{OC} + \nu_2 \vec{OF} + (1 - \nu_1 - \nu_2) \vec{OH}$$

On déduit:

$$\vec{OL} = -\vec{OA} + (\nu_1 + \nu_2) \vec{OB} + (1 - \nu_2) \vec{OD} + (1 - \nu_1) \vec{OE}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D, E

$$-1, \quad \nu_1 + \nu_2, \quad 1 - \nu_2, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{3} \quad \nu_1 = \frac{1}{3} \quad \nu_2 = \frac{1}{3}$$

On déduit que:

$$\vec{OL} = \frac{-3\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OD} + 2\vec{OE}}{3}$$

$$\vec{OL} = \frac{-3\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OD} + 2\vec{OE}}{3}$$

Exercice 5.2.6 *Théorème de Menelaüs dans l'espace*

Soit $ABCD$ un tétraèdre et A', B', C' des points situés respectivement sur les droites (AB) , (BC) , (CD) . On désigne par D' l'intersection du plan $(A'B'C')$ avec la droite (AD) . Démontrer la relation

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}} = 1$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, A', B', C'\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont A', B', C' .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \vec{A'A} - \alpha \vec{A'B} = \vec{OA} - \alpha \vec{OB} + (-1 + \alpha) \vec{OA'}$$

$$\vec{0} = \vec{B'B} - \beta \vec{B'C} = \vec{OB} - \beta \vec{OC} + (-1 + \beta) \vec{OB'}$$

$$\vec{0} = \vec{C'C} - \gamma \vec{C'D} = \vec{OC} - \gamma \vec{OD} + (-1 + \gamma) \vec{OC'}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OA'} = \frac{-\vec{OA} + \alpha \vec{OB}}{-1 + \alpha}$$

$$\vec{OA'} = \frac{-\vec{OA} + \alpha \vec{OB}}{-1 + \alpha}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{-\overrightarrow{OB} + \beta \overrightarrow{OC}}{-1 + \beta}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{-\overrightarrow{OB} + \beta \overrightarrow{OC}}{-1 + \beta}$$

$$\overrightarrow{OC'} = \frac{-\overrightarrow{OC} + \gamma \overrightarrow{OD}}{-1 + \gamma}$$

$$\overrightarrow{OC'} = \frac{-\overrightarrow{OC} + \gamma \overrightarrow{OD}}{-1 + \gamma}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, A', B', C', D'\}$

Détermination du point D' :

Le point D' est composé.

Comme $D' \in (AD)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OD'} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\mu_1, \quad 0, \quad 0, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $D' \in (A'B'C')$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\overrightarrow{OD'} = \nu_2 \overrightarrow{OB'} + (1 - \nu_1 - \nu_2) \overrightarrow{OC'} + \nu_1 \overrightarrow{OA'}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD'} &= \frac{(-\nu_1 + \beta \nu_1 + \gamma \nu_1 - \beta \gamma \nu_1) \overrightarrow{OA}}{(-1 + \alpha)(-1 + \beta)(-1 + \gamma)} \\ &+ \frac{(\alpha \nu_1 - \alpha \beta \nu_1 - \alpha \gamma \nu_1 + \alpha \beta \gamma \nu_1 - \nu_2 + \alpha \nu_2 + \gamma \nu_2 - \alpha \gamma \nu_2) \overrightarrow{OB}}{(-1 + \alpha)(-1 + \beta)(-1 + \gamma)} \\ &+ \frac{(-1 + \alpha + \beta - \alpha \beta + \nu_1 - \alpha \nu_1 - \beta \nu_1 + \alpha \beta \nu_1 + \nu_2 - \alpha \nu_2 - \beta \gamma \nu_2 + \alpha \beta \gamma \nu_2) \overrightarrow{OC}}{(-1 + \alpha)(-1 + \beta)(-1 + \gamma)} \\ &+ \frac{(\gamma - \alpha \gamma - \beta \gamma + \alpha \beta \gamma - \gamma \nu_1 + \alpha \gamma \nu_1 + \beta \gamma \nu_1 - \alpha \beta \gamma \nu_1 - \gamma \nu_2 + \alpha \gamma \nu_2 + \beta \gamma \nu_2 - \alpha \beta \gamma \nu_2) \overrightarrow{OD}}{(-1 + \alpha)(-1 + \beta)(-1 + \gamma)} \end{aligned}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{-\nu_1}{-1 + \alpha}, \quad \frac{-\alpha \nu_1 + \alpha \beta \nu_1 + \nu_2 - \alpha \nu_2}{(-1 + \alpha)(-1 + \beta)}, \quad \frac{1 - \beta - \nu_1 + \beta \nu_1 - \nu_2 + \beta \gamma \nu_2}{(-1 + \beta)(-1 + \gamma)}, \quad \frac{-\gamma(-1 + \nu_1 + \nu_2)}{-1 + \gamma}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{-1}{-1 + \alpha \beta \gamma} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \alpha}{-1 + \alpha \beta \gamma} \quad \nu_2 = \frac{\alpha(-1 + \beta)}{-1 + \alpha \beta \gamma}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OD'} = \frac{-\overrightarrow{OA} + \alpha \beta \gamma \overrightarrow{OD}}{-1 + \alpha \beta \gamma}$$

$$\overrightarrow{OD'} = \frac{-\overrightarrow{OA} + \alpha \beta \gamma \overrightarrow{OD}}{-1 + \alpha \beta \gamma}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{D'D}$. On a:

$$\overrightarrow{D'D} = \frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}}{-1 + \alpha \beta \gamma}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{D'A}$. On a:

$$\overrightarrow{D'A} = \frac{\alpha \beta \gamma \overrightarrow{OA} - \alpha \beta \gamma \overrightarrow{OD}}{-1 + \alpha \beta \gamma}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{D'D} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \overrightarrow{D'A}$$

Exercice 5.2.7 Réciproque du théorème de Menelaüs dans l'espace

Soit $ABCD$ un tétraèdre et A', B', C', D' des points situés respectivement sur les droites (AB) , (BC) , (CD) , (DA) et vérifiant la relation

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}} = 1$$

Montrer que les 4 points A', B', C', D' sont coplanaires.

Solution:

L'un des points A', B', C', D' n'est pas le sommet du tétraèdre, on peut donc supposer, quitte à changer les notations, que $A' \neq A$. Afin d'exprimer $\overrightarrow{A'D'}$ en fonction de $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$, on prendra pour points purs A', B', C', A .

Dessin = $\{A', B', C', A, B, C, D, D'\}$

Les points composés sont B, C, D, D' .

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \overrightarrow{A'A} - \alpha \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OB} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA'}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{B'B} - \beta \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{OB} - \beta \overrightarrow{OC} + (-1 + \beta) \overrightarrow{OB'}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{C'C} - \gamma \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{OC} - \gamma \overrightarrow{OD} + (-1 + \gamma) \overrightarrow{OC'}$$

$$\vec{0} = \frac{-1}{\alpha\beta\gamma} \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'D} = \frac{-\overrightarrow{OA} + \alpha\beta\gamma \overrightarrow{OD} + 1 - \alpha\beta\gamma \overrightarrow{OD'}}{\alpha\beta\gamma}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OD'} = \frac{(-\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{OB'} + (-\alpha\beta + \alpha\beta\gamma) \overrightarrow{OC'} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA'}}{-1 + \alpha\beta\gamma}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{OB'} + (-\alpha\beta + \alpha\beta\gamma) \overrightarrow{OC'} - 1 + \alpha \overrightarrow{OA'}}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{OB'} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA'}}{\alpha\beta}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA'}}{\alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A'D'}$. On a:

$$\overrightarrow{A'D'} = \frac{(-\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{OB'} + (-\alpha\beta + \alpha\beta\gamma) \overrightarrow{OC'} + (\alpha - \alpha\beta\gamma) \overrightarrow{OA'}}{-1 + \alpha\beta\gamma}$$

Points purs
 A', B', C', A

$$\overrightarrow{OD'} = \frac{(-\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{OB'} + (-\alpha\beta + \alpha\beta\gamma) \overrightarrow{OC'} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA'}}{-1 + \alpha\beta\gamma}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{OB'} + (-\alpha\beta + \alpha\beta\gamma) \overrightarrow{OC'} - 1 + \alpha \overrightarrow{OA'}}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{OB'} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA'}}{\alpha\beta}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA'}}{\alpha}$$

Dans l'expression

$$(-\alpha + \alpha\beta)\overrightarrow{OB'} + (-\alpha\beta + \alpha\beta\gamma)\overrightarrow{OC'} + (\alpha - \alpha\beta\gamma)\overrightarrow{OA'}$$

la somme des coefficients est égale à 0, donc ce vecteur est indépendant de O et, en prenant $O = A'$ par exemple, on obtient

$$\overrightarrow{A'D'} = \frac{(-\alpha + \alpha\beta)\overrightarrow{A'B'} + (-\alpha\beta + \alpha\beta\gamma)\overrightarrow{A'C'}}{-1 + \alpha\beta\gamma}$$

donc D' appartient au plan $(A'B'C')$.

Exercice 5.2.8

Soient A, B, C, D, E, F, G, H des points tels que l'on ait:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{EH} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Déterminer, par calcul formel, l'intersection du sous-espace affine (GFH) avec le sous-espace affine (BCD) . Quelle conclusion doit-on formuler sur cet énoncé ?

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D, E .

Les points composés sont F, G, H .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C, D, E

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OF} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OH} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} & \overrightarrow{OF} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} & \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} \\ \overrightarrow{OH} &= \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}}{2} & \overrightarrow{OH} &= \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}}{2} \end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G, H, K\}$

Détermination d'un point $K \in (GFH) \cap (BCD)$:

Le point K est composé.

Comme $K \in (GFH)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1, μ_2

$$\overrightarrow{OK} = \mu_2\overrightarrow{OF} + \mu_1\overrightarrow{OG} + (1 - \mu_1 - \mu_2)\overrightarrow{OH}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(\mu_1 + 2\mu_2)\overrightarrow{OA} + (\mu_1 + 2\mu_2)\overrightarrow{OB} + (2 - \mu_1 - 2\mu_2)\overrightarrow{OC} + \mu_1\overrightarrow{OD} + (2 - 2\mu_1 - 2\mu_2)\overrightarrow{OE}}{4}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D, E

$$\frac{\mu_1 + 2\mu_2}{4}, \quad \frac{\mu_1 + 2\mu_2}{4}, \quad \frac{2 - \mu_1 - 2\mu_2}{4}, \quad \frac{\mu_1}{4}, \quad \frac{1 - \mu_1 - \mu_2}{2}$$

Comme $K \in (BCD)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1\overrightarrow{OB} + \nu_2\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D, E

$$0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad 1 - \nu_1 - \nu_2, \quad 0$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ donne

$$\mu_1 = 2 \quad \mu_2 = -1 \quad \nu_1 = 0 \quad \nu_2 = \frac{1}{2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

L'intersection des 2 plans est donc un point. Cette conclusion n'est acceptable que dans l'hypothèse où les points A, B, C, D, E de l'énoncé sont distincts et placés indépendamment les uns des autres. En effet, nous admettons l'unicité de l'écriture du vecteur \overrightarrow{OK} , unicité assurée lorsque les vecteurs $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}$ forment un système libre. L'espace environnant est donc un espace de dimension au moins 4.

Dans l'hypothèse où l'exercice se situe dans l'espace usuel \mathbf{R}^3 , la méthode barycentrique ou la méthode utilisant le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{0} \\ + (2 - \mu_1 - 2\mu_2)\overrightarrow{KC} + \mu_1\overrightarrow{KD} + (2 - 2\mu_1 - 2\mu_2)\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{0} \\ \nu_1\overrightarrow{KB} + \nu_2\overrightarrow{KC} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$$

s'appliquent avec pour conséquence, la diminution du nombre de points purs et l'adjonction de paramètres réels nécessaires à la formule descriptive du point K .

CHAPITRE

6

Barycentres et intersections

6.1 Barycentres et intersections dans le plan

Exercice 6.1.1

Soit ABC un triangle, I le milieu de AB , J le point tel que $\vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CA}$. Les droites (CI) et (BJ) se coupent en K . Trouver les réels a, b, c tels que l'on ait

$$K = \text{barycentre } (A, a), (B, b), (C, c)$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, I, J\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont J, I .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{AI} - \vec{IB} &= -\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OI} \\ \vec{0} &= \frac{-1}{3}\vec{CA} + \vec{CJ} &= \frac{-\vec{OA} - 2\vec{OC} + 3\vec{OJ}}{3} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OJ} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OC}}{3}$$

$$\vec{OJ} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OC}}{3}$$

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, I, J, K\}$

Détermination du point K :

Le point K est composé.

Comme $K \in (CI)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OK} = \mu_1 \vec{OC} + (1 - \mu_1) \vec{OI}$$

On déduit:

$$\vec{OK} = \frac{(1 - \mu_1)\vec{OA} + (1 - \mu_1)\vec{OB} + 2\mu_1\vec{OC}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{1 - \mu_1}{2}, \quad \frac{1 - \mu_1}{2}, \quad \mu_1$$

Comme $K \in (BJ)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OJ}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(1 - \nu_1) \overrightarrow{OA} + 3\nu_1 \overrightarrow{OB} + (2 - 2\nu_1) \overrightarrow{OC}}{3}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{1 - \nu_1}{3}, \quad \nu_1, \quad \frac{-2(-1 + \nu_1)}{3}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad \nu_1 = \frac{1}{4}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{4}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{4}$$

donc $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$.

Exercice 6.1.2

Soit A, B, C, D, E cinq points distincts du plan et I (resp. J) le point d'intersection des droites (EB) et (AD) (resp. (EB) et (AC)). On suppose que les points I et J de la droite (BE) sont placés tels que $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EB} = \frac{4}{3} \overrightarrow{EJ}$. Préciser, à partir de la position de J sur la droite (AC) , la position de D en fonction de A, B, C de telle sorte que le point J soit le centre de gravité du triangle ABD .

Lorsque le point J décrit la droite (AC) , quel est le lieu des points D ?

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, J\}$

Les points purs imposés sont A, B, C .

Positionnons le point J sur la droite (AC) en choisissant un réel α tel que

$\overrightarrow{AJ} = \alpha \overrightarrow{AC}$. Le point J est composé.

Points purs
 A, B, C

On a le découpage:

$$\overrightarrow{0} = -\alpha \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AJ} = (-1 + \alpha) \overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OJ}$$

On déduit la description du point composé:

$$\vec{OJ} = (1 - \alpha)\vec{OA} + \alpha\vec{OC}$$

$$\vec{OJ} = (1 - \alpha)\vec{OA} + \alpha\vec{OC}$$

Dessin = {A, B, C, J, E, I}

Les points composés sont E, I.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{EI} - \vec{IJ} = -\vec{OE} + 2\vec{OI} - \vec{OJ} \\ \vec{0} &= \vec{EB} - \frac{4}{3}\vec{EJ} = \frac{3\vec{OB} + \vec{OE} - 4\vec{OJ}}{3}\end{aligned}$$

Points purs

A, B, C

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{EI} - \vec{IJ} = (-1 + \alpha)\vec{OA} - \alpha\vec{OC} - \vec{OE} + 2\vec{OI} \\ \vec{0} &= \vec{EB} - \frac{4}{3}\vec{EJ} = \frac{(-4 + 4\alpha)\vec{OA} + 3\vec{OB} - 4\alpha\vec{OC} + \vec{OE}}{3}\end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= (4 - 4\alpha)\vec{OA} - 3\vec{OB} + 4\alpha\vec{OC} \\ \vec{OI} &= \frac{(5 - 5\alpha)\vec{OA} - 3\vec{OB} + 5\alpha\vec{OC}}{2}\end{aligned}$$

$$\vec{OE} = (4 - 4\alpha)\vec{OA} - 3\vec{OB} + 4\alpha\vec{OC}$$

$$\vec{OI} = \frac{(5 - 5\alpha)\vec{OA} - 3\vec{OB} + 5\alpha\vec{OC}}{2}$$

Dessin = {A, B, C, J, E, I, D}

Détermination du point D:

Le point D est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = \vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} - 3\vec{OJ}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JD} = (-2 + 3\alpha)\vec{OA} + \vec{OB} - 3\alpha\vec{OC} + \vec{OD}$$

On déduit la description du point composé:

$$\vec{OD} = (2 - 3\alpha)\vec{OA} - \vec{OB} + 3\alpha\vec{OC}$$

Il en résulte que

$$\vec{OD} = (2\vec{OA} - \vec{OB}) + 3\alpha(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= (2 - 3\alpha)\vec{OA} \\ &\quad - \vec{OB} + 3\alpha\vec{OC}\end{aligned}$$

équation paramétrique d'une droite parallèle à la droite (AC) (le vecteur directeur est $\vec{OC} - \vec{OA}$).

Exercice 6.1.3

On considère un triangle ABC et son centre de gravité G . Une droite (Δ) ne passant pas par G coupe respectivement les droites (GA) , (GB) , (GC) en A_1, B_1, C_1 .

Montrer que:

$$\frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GA_1}} + \frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{GB_1}} + \frac{\overrightarrow{GC}}{\overrightarrow{GC_1}} = 0$$

Solution:

La droite (Δ) s'identifie à la droite A_1, B_1 , les points A_1 et B_1 étant placés arbitrairement sur chacune des droites (GA) et (GB) .

Dessin = $\{A, B, C, G, A_1, B_1\}$

Les points purs choisis ici sont A, B, G .

Les points composés sont C, A_1, B_1 .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, G

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{GA_1} - \alpha_1 \overrightarrow{GA} &= \overrightarrow{OA_1} - \alpha_1 \overrightarrow{OA} - (1 - \alpha_1) \overrightarrow{OG} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{GB_1} - \alpha_2 \overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{OB_1} - \alpha_2 \overrightarrow{OB} - (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OG} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3 \overrightarrow{OG} \end{aligned}$$

avec α_1 et α_2 constantes non-nulles (car $G \neq A_1$ et $G \neq B_1$).

La résolution de ce système linéaire donne:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= \alpha_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha_1) \overrightarrow{OG} & \overrightarrow{OA_1} &= \alpha_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha_1) \overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{OB_1} &= \alpha_2 \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OG} & \overrightarrow{OB_1} &= \alpha_2 \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{OC} &= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 3 \overrightarrow{OG} & \overrightarrow{OC} &= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 3 \overrightarrow{OG} \end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, G, A_1, B_1, C_1\}$

Détermination du point C_1 :

Comme $C_1 \in (GC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OG}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_1} = -\mu_1 \overrightarrow{OA} - \mu_1 \overrightarrow{OB} + (2\mu_1 + 1) \overrightarrow{OG}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, G

$$-\mu_1, \quad -\mu_1, \quad 2\mu_1 + 1$$

Comme $C_1 \in (B_1A_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_1} = (1 - \nu_1)\alpha_1 \overrightarrow{OA} + \nu_1\alpha_2 \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \alpha\nu_1 - \alpha_2\nu_1) \overrightarrow{OG}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, G

$$(1 - \nu_1)\alpha_1, \quad \nu_1\alpha_2, \quad 1 - \alpha - \alpha\nu_1 - \alpha_2\nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \nu_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\alpha_1\alpha_2\overrightarrow{OA} + \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{OB} + (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2)\overrightarrow{OG}}{\alpha_1 + \alpha_2} \qquad \overrightarrow{OC_1} = \frac{\alpha_1\alpha_2\overrightarrow{OA} + \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{OB}}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2)\overrightarrow{OG}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. En effet, lorsque $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, la résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne $\alpha_1 = 0$ donc $G = A_1$ ce qui est absurde. On a donc:

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GA_1}} + \frac{\overline{GB}}{\overline{GB_1}} + \frac{\overline{GC}}{\overline{GC_1}} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} = 0$$

6.2 Barycentres et intersections dans l'espace

Exercice 6.2.1

Soit $ABCD$ est un tétraèdre, G l'isobarycentre des points A, B, C, D et P tel que $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. On désigne par K le point où la droite (PG) coupe le plan (BCD) . Montrer que

$$\overrightarrow{PG} = \frac{5}{8}\overrightarrow{PK}$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, G, P\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont G, P .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OP} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} & \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} & \overrightarrow{OP} &= \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} \end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, G, P, K\}$

Détermination du point K :

Le point K est composé.

Comme $K \in (PG)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OK} = (1 - \mu_1)\overrightarrow{OG} + \mu_1\overrightarrow{OP}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(3 + 5\mu_1)\overrightarrow{OA} + (3 + \mu_1)\overrightarrow{OB} + (3 - 3\mu_1)\overrightarrow{OC} + (3 - 3\mu_1)\overrightarrow{OD}}{12}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{3 + 5\mu_1}{12}, \quad \frac{3 + \mu_1}{12}, \quad \frac{1 - \mu_1}{4}, \quad \frac{1 - \mu_1}{4}$$

Comme $K \in (BCD)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1\overrightarrow{OB} + \nu_2\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \nu_1\overrightarrow{OB} + \nu_2\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad 1 - \nu_1 - \nu_2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{-3}{5} \quad \nu_1 = \frac{1}{5} \quad \nu_2 = \frac{2}{5}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}}{5}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}}{5}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{PG} . On a:

$$\overrightarrow{PG} = \frac{-5\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OD}}{12}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{PK} . On a:

$$\overrightarrow{PK} = \frac{-10\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{OC} + 6\overrightarrow{OD}}{15}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{PG} = \frac{5}{8}\overrightarrow{PK}$$

Exercice 6.2.2

On considère un triangle ABC et un point M n'appartenant pas au plan (ABC) . Soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des bipoints $(B, C), (A, C), (A, B)$ et soient M_1, M_2, M_3 les symétriques respectifs du point M par rapport à A_1, B_1, C_1 .

1. Montrer que les plans (ABC) et $(M_1M_2M_3)$ sont parallèles.
2. Montrer que les segments $[A, M_1], [B, M_2]$ et $[C, M_3]$ se coupent en leur milieu.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M, A_1, B_1, C_1, M_1, M_2, M_3\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, M .

Les points composés sont $A_1, B_1, C_1, M_1, M_2, M_3$.

Points purs
 A, B, C, M

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{BA_1} - \vec{A_1C} = -\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OA_1} \\ \vec{0} &= \vec{CB_1} - \vec{B_1A} = -\vec{OA} - \vec{OC} + 2\vec{OB_1} \\ \vec{0} &= \vec{AC_1} - \vec{C_1B} = -\vec{OA} - \vec{OB} + 2\vec{OC_1} \\ \vec{0} &= -\vec{A_1M} + \vec{M_1A_1} = 2\vec{OA_1} - \vec{OM_1} - \vec{OM} \\ \vec{0} &= -\vec{B_1M} + \vec{M_2B_1} = 2\vec{OB_1} - \vec{OM_2} - \vec{OM} \\ \vec{0} &= -\vec{C_1M} + \vec{M_3C_1} = 2\vec{OC_1} - \vec{OM_3} - \vec{OM} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \vec{OA_1} &= \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} & \vec{OA_1} &= \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} \\ \vec{OB_1} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} & \vec{OB_1} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} \\ \vec{OC_1} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} & \vec{OC_1} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \\ \vec{OM_1} &= \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OM} & \vec{OM_1} &= \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OM} \\ \vec{OM_2} &= \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OM} & \vec{OM_2} &= \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OM} \\ \vec{OM_3} &= \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OM} & \vec{OM_3} &= \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OM} \end{aligned}$$

1/. Calculons le vecteur $\vec{M_1M_2}$. On a:

$$\vec{M_1M_2} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

Calculons le vecteur $\vec{M_1M_3}$. On a:

$$\vec{M_1M_3} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{CA}$$

2/. Soient J_1, J_2, J_3 les milieux des segments mentionnés.

Dessin = $\{A, B, C, M, A_1, B_1, C_1, M_1, M_2, M_3, J_1, J_2, J_3\}$

Les points J_1, J_2, J_3 sont composés.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \overrightarrow{AJ_1} - \overrightarrow{J_1M_1} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OJ_1} - \overrightarrow{OM_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{BJ_2} - \overrightarrow{J_2M_2} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_2} + 2\overrightarrow{OJ_2} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{CJ_3} - \overrightarrow{J_3M_3} = -\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OJ_3} - \overrightarrow{OM_3}\end{aligned}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \overrightarrow{AJ_1} - \overrightarrow{J_1M_1} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OJ_1} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{BJ_2} - \overrightarrow{J_2M_2} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OJ_2} + \overrightarrow{OM} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{CJ_3} - \overrightarrow{J_3M_3} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OJ_3} + \overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OJ_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ_2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ_3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ_2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OJ_3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

donc $J_1 = J_2 = J_3$.

Exercice 6.2.3

Soit $ABCD$ un tétraèdre et E, F des points tels que l'on ait

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{EC}$$

Soit G (resp. G_1) le centre de gravité du triangle ACE (resp. BEF). Déterminer l'intersection du plan (GG_1E) avec le plan (ABC) .

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G, G_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont F, E, G, G_1 .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} \\ \vec{0} &= -2\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = -2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} - 3\overrightarrow{OG} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1E} + \overrightarrow{G_1F} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} - 3\overrightarrow{OG_1}\end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OF} = 2\vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC}$$

$$\vec{OE} = 2\vec{OC} - \vec{OD}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + 3\vec{OC} - \vec{OD}}{3}$$

$$\vec{OG}_1 = \frac{2\vec{OA} - \vec{OB} + 3\vec{OC} - \vec{OD}}{3}$$

$$\vec{OF} = 2\vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC}$$

$$\vec{OE} = 2\vec{OC} - \vec{OD}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + 3\vec{OC} - \vec{OD}}{3}$$

$$\vec{OG}_1 = \frac{2\vec{OA} - \vec{OB} + 3\vec{OC} - \vec{OD}}{3}$$

Dessin = {A, B, C, D, E, F, G, G₁, H}

Détermination d'un point $H \in (GG_1E) \cap (ABC)$:

Le point H est composé.

Comme $H \in (GG_1E)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1, μ_2

$$\vec{OH} = (1 - \mu_1 - \mu_2)\vec{OE} + \mu_1\vec{OG} + \mu_2\vec{OG}_1$$

On déduit:

$$\vec{OH} = \frac{(\mu_1 + 2\mu_2)\vec{OA} - \mu_2\vec{OB} + (6 - 3\mu_1 - 3\mu_2)\vec{OC} + (-3 + 2\mu_1 + 2\mu_2)\vec{OD}}{3}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{\mu_1 + 2\mu_2}{3}, \quad \frac{-\mu_2}{3}, \quad 2 - \mu_1 - \mu_2, \quad \frac{-3 + 2\mu_1 + 2\mu_2}{3}$$

Comme $H \in (ABC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\vec{OH} = \nu_1\vec{OA} + \nu_2\vec{OB} + (1 - \nu_1 - \nu_2)\vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad 1 - \nu_1 - \nu_2, \quad 0$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ donne

$$\mu_1 = \frac{3}{2} + 3\nu_2 \quad \mu_2 = -3\nu_2 \quad \nu_1 = \frac{1}{2} - \nu_2 \quad \nu_2 \in \mathbf{R}$$

On déduit que:

$$\vec{OH} = \frac{(1 - 2\nu_2)\vec{OA} + 2\nu_2\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OH} = \frac{(1 - 2\nu_2)\vec{OA} + 2\nu_2\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

soit

$$\vec{OH} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} + \nu_2 \frac{-2\vec{OA} + 2\vec{OB}}{2}$$

C'est l'équation paramétrique d'une droite passant par le milieu du segment [AC] de vecteur directeur \vec{AB} .

Exercice 6.2.4

Soit $ABCD$ un tétraèdre et E, F, G, H des points tels que l'on ait

$$\begin{aligned} 2\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AF} &= \vec{0} \\ \vec{EF} - 2\vec{EH} &= \vec{0} \\ \vec{GA} + 2\vec{GE} + \vec{HD} &= \vec{0} \\ -\vec{BC} + 3\vec{GF} + \vec{HF} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Déterminer l'intersection de la droite (AH) avec le plan (CFB) .

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Les points composés sont F, E, G, H .

Points purs
 A, B, C, D

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= 2\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AF} = -2\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OE} + \vec{OF} \\ \vec{0} &= \vec{EF} - 2\vec{EH} = \vec{OE} + \vec{OF} - 2\vec{OH} \\ \vec{0} &= \vec{GA} + 2\vec{GE} + \vec{HD} = \vec{OA} + \vec{OD} + 2\vec{OE} - 3\vec{OG} - \vec{OH} \\ \vec{0} &= -\vec{BC} + 3\vec{GF} + \vec{HF} = \vec{OB} - \vec{OC} + 4\vec{OF} - 3\vec{OG} - \vec{OH} \end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned} \vec{OF} &= \frac{-3\vec{OA} + 3\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{2} & \vec{OF} &= \frac{-3\vec{OA} + 3\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{2} \\ \vec{OE} &= \frac{-7\vec{OA} + 7\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{2} & \vec{OE} &= \frac{-7\vec{OA} + 7\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{2} \\ \vec{OG} &= \frac{-7\vec{OA} + 9\vec{OB} + \vec{OC} + 3\vec{OD}}{6} & \vec{OG} &= \frac{-7\vec{OA} + 9\vec{OB} + \vec{OC} + 3\vec{OD}}{6} \\ \vec{OH} &= \frac{-5\vec{OA} + 5\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{2} & \vec{OH} &= \frac{-5\vec{OA} + 5\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{2} \end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, G, H, K\}$

Détermination d'un point $K \in (AH) \cap (CFB)$:

Le point K est composé.

Comme $K \in (AH)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OK} = \mu_1 \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OH}$$

On déduit:

$$\vec{OK} = \frac{(-5 + 7\mu_1)\vec{OA} + (5 - 5\mu_1)\vec{OB} + (1 - \mu_1)\vec{OC} + (1 - \mu_1)\vec{OD}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{-5 + 7\mu_1}{2}, \quad \frac{-5(-1 + \mu_1)}{2}, \quad \frac{1 - \mu_1}{2}, \quad \frac{1 - \mu_1}{2}$$

Comme $K \in (CFB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1, ν_2

$$\overrightarrow{OK} = (1 - \nu_1 - \nu_2)\overrightarrow{OB} + \nu_1\overrightarrow{OC} + \nu_2\overrightarrow{OF}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-3\nu_2\overrightarrow{OA} + (2 - 2\nu_1 + \nu_2)\overrightarrow{OB} + (2\nu_1 + \nu_2)\overrightarrow{OC} + \nu_2\overrightarrow{OD}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\frac{-3\nu_2}{2}, \quad \frac{2 - 2\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \frac{2\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \frac{\nu_2}{2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1, ν_2 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad \nu_1 = 0 \quad \nu_2 = \frac{1}{2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$$

CHAPITRE

7

Transformations et lieux géométriques

7.1 Lieux géométriques

Exercice 7.1.1

On considère dans l'espace une droite (D) fixe et 2 points A et B n'appartenant pas à (D) . Un point C décrit la droite (D) . Quel est le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle ABC ?

Solution:

Désignons par J, K deux points distincts de la droite (D) .

Dessin = $\{A, B, C, J, K, G\}$

Les points purs choisis sont A, B, J, K .

Les points composés sont C, G .

Comme $C \in (J, K)$, il existe α tel que $\overrightarrow{JC} = \alpha \overrightarrow{JK}$.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{JC} - \alpha \overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{OC} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OJ} - \alpha \overrightarrow{OK} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3 \overrightarrow{OG} \end{aligned}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= (1 - \alpha) \overrightarrow{OJ} + \alpha \overrightarrow{OK} & \overrightarrow{OC} &= (1 - \alpha) \overrightarrow{OJ} + \alpha \overrightarrow{OK} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OJ} + \alpha \overrightarrow{OK}}{3} & \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OJ} + \alpha \overrightarrow{OK}}{3} \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OJ} + (-\alpha \overrightarrow{OJ} + \alpha \overrightarrow{OK})}{3} \\ &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OJ}}{3} + \frac{\alpha}{3} \overrightarrow{JK} \end{aligned}$$

donc G décrit une droite parallèle à (D) passant par le centre de gravité du triangle ABJ .

7.2 Composées de translations et d'homothéties

Exercice 7.2.1 (composée de 2 homothéties)

Soient h_1 une homothétie de centre I et de rapport $\alpha_1 \neq 1$, h_2 une homothétie de centre J et de rapport $\alpha_2 \neq 1$. Etudier la transformation $h_2 \circ h_1$.

Solution:

Soit M un point quelconque. La transformation $h_2 \circ h_1$ est représentée par la chaîne de calculs

$$M \longrightarrow h_1(M) = M_1 \longrightarrow h_2(M_1) = M_2$$

Il nous faut calculer ici $\overrightarrow{OM_2}$ en fonction de \overrightarrow{OM} .

Les points purs sont M, I, J .

Les points composés sont M_1, M_2 .

Par définition, on a $\overrightarrow{M_1I} = \alpha_1 \overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{M_2J} = \alpha_2 \overrightarrow{M_1J}$.

Points purs
 M, I, J

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{M_1I} - \alpha_1 \overrightarrow{MI} &= -\overrightarrow{OM_1} + (1 - \alpha_1) \overrightarrow{OI} + \alpha_1 \overrightarrow{OM} \\ \vec{0} &= -\alpha_2 \overrightarrow{M_1J} + \overrightarrow{M_2J} &= \alpha_2 \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_1} = \alpha_1 \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha_1) \overrightarrow{OI} \qquad \overrightarrow{OM_1} = \alpha_1 \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha_1) \overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \alpha_1 \alpha_2 \overrightarrow{OM} + (\alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) \overrightarrow{OI} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OJ}$$

Lorsque $\alpha_1 \alpha_2 \neq 1$, $\overrightarrow{OM_2}$ est de la forme:

$$\overrightarrow{OM_2} = \alpha_1 \alpha_2 \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OJ} + (\alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) \overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = k \overrightarrow{OM} + (1 - k) \overrightarrow{O\Omega}$$

avec $k = \alpha_1 \alpha_2$ et

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) \overrightarrow{OI} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OJ}}{1 - \alpha_1 \alpha_2}$$

donc $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $\alpha_1 \alpha_2$ et de centre Ω égal au barycentre de $\{I, (\alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2)\}$ et de $\{J, (1 - \alpha_2)\}$.

Lorsque $\alpha_1 \alpha_2 = 1$, $\overrightarrow{OM_2}$ est de la forme:

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM} + (\alpha_2 - 1) \overrightarrow{OI} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OJ}$$

donc $h_2 \circ h_1$ est une translation de vecteur $\vec{u} = (\alpha_2 - 1) \overrightarrow{OI} + (1 - \alpha_2) \overrightarrow{OJ}$. Ce vecteur \vec{u} est indépendant du point O puisque la somme des coefficients intervenant dans l'expression de \vec{u} est nulle.

Exercice 7.2.2 (composée homothétie et translations)

Soient \vec{u} et \vec{v} 2 vecteurs et h une homothétie de centre I et de rapport $\alpha \neq 1$.

Etudier la transformation $t_{\vec{v}} \circ h \circ t_{\vec{u}}$.

Solution:

Soit M un point quelconque. La transformation $t_{\vec{v}} \circ h \circ t_{\vec{u}}$ est représentée par la chaîne de calculs

$$M \longrightarrow t_{\vec{u}}(M) = M_1 \longrightarrow h(M_1) = M_2 \longrightarrow t_{\vec{v}}(M) = M_3$$

Il nous faut calculer ici $\overrightarrow{OM_3}$ en fonction de \overrightarrow{OM} .

Les points purs choisis sont M, I .

Points purs
 M, I

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne peuvent être identifiés à des points purs, bien qu'ils soient gérés tels quels dans les calculs. En réalité, chacun d'eux est de la forme $\vec{u} = \overrightarrow{OU_2} - \overrightarrow{OU_1}$ avec U_1, U_2 points purs, et $\vec{v} = \overrightarrow{OV_2} - \overrightarrow{OV_1}$ avec V_1, V_2 points purs.

Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

Chacune des transformations donne lieu à un découpage automatique.

Les relations successives

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{u} \quad \overrightarrow{M_2I} = \alpha \overrightarrow{M_1I} \quad \overrightarrow{M_2M_3} = \vec{v}$$

impliquent

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{MM_1} - \vec{u} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} + \vec{u} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{M_2I} - \alpha \overrightarrow{M_1I} = \alpha \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{M_2M_3} - \vec{v} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2} - \vec{v} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \overrightarrow{OM} + \vec{u} \\ \overrightarrow{OM_2} &= \alpha \overrightarrow{OM_1} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{OM_3} &= \overrightarrow{OM_2} + \vec{v} \end{aligned}$$

En substituant progressivement, on obtient:

$$\overrightarrow{OM_3} = (\alpha \overrightarrow{OM_1} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI}) + \vec{v}$$

donc

$$\overrightarrow{OM_3} = \alpha \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI} + \alpha \vec{u} + \vec{v}$$

Cette expression est de la forme

$$\overrightarrow{OM_3} = \alpha \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \overrightarrow{O\Omega}$$

$$\overrightarrow{OM_3} = \alpha \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI} + \alpha \vec{u} + \vec{v}$$

avec

$$(1 - \alpha) \overrightarrow{O\Omega} = (1 - \alpha) \overrightarrow{OI} + \alpha \vec{u} + \vec{v}$$

identique à

$$(1 - \alpha) \overrightarrow{I\Omega} = \alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

donc Ω est le translaté du point I dans la translation de vecteur $\frac{\alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}{(1-\alpha)}$.

Ainsi, $t_{\overrightarrow{v}} \circ h \circ t_{\overrightarrow{u}}$ est une homothétie de rapport α et de centre Ω .

Exercice 7.2.3 (composée homothétie inverse- translation-homothétie)

Soient \overrightarrow{u} un vecteur et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation correspondante. Soit h une homothétie de centre I et de rapport $\alpha \neq 1$. Etudier la transformation $h^{-1} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ h$.

Solution:

Soit M un point quelconque. La transformation $h^{-1} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ h$ est représentée par la chaîne de calculs

$$M \longrightarrow h(M) = M_1 \longrightarrow t_{\overrightarrow{u}}(M_1) = M_2 \longrightarrow h^{-1}(M_2) = M_3$$

Il nous faut calculer ici $\overrightarrow{OM_3}$ en fonction de \overrightarrow{OM} .

Les points purs choisis sont M, I .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

Chacune des transformations donne lieu à un découpage automatique.

Les relations successives

Points purs
 M, I

$$\overrightarrow{IM_1} = \alpha \overrightarrow{IM} \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{u} \quad \overrightarrow{IM_3} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{IM_2}$$

impliquent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{M_1I} - \alpha \overrightarrow{MI} &= -\overrightarrow{OM_1} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI} + \alpha \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{u} &= -\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{M_2I} + \alpha \overrightarrow{M_3I} &= \overrightarrow{OM_2} - \alpha \overrightarrow{OM_3} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OI} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \alpha \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{OM_2} &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{OM_3} &= \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{OM_2} + \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \overrightarrow{OI} \end{aligned}$$

En substituant progressivement, on obtient d'abord:

$$\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{\alpha} (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{u}) + \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \overrightarrow{OI}$$

puis

$$\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{u}}{\alpha} \qquad \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{u}}{\alpha}$$

La transformation $h^{-1} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ h$ est donc une translation de vecteur $\frac{\overrightarrow{u}}{\alpha}$.

7.3 Exemples divers

Exercice 7.3.1

Soit un triangle ABC et A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des bipoints (B, C) , (A, C) , (A, B) . Soient M un point quelconque du plan et I, J, K les symétriques respectifs du point M par rapport à A_1, B_1, C_1 . Démontrer que le triangle IJK est l'image du triangle ABC par une symétrie centrale dont on précisera le centre.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M, I, J, K, A_1, B_1, C_1\}$

Procédons de manière automatique. On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{A_1C} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{B_1C} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{C_1B} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{IA_1} - \overrightarrow{A_1M} = -\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OA_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{JB_1} - \overrightarrow{B_1M} = -\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OB_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{KC_1} - \overrightarrow{C_1M} = -\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OC_1} \end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire donne:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{-\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{-\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

Les points purs sont donc I, J, K, M .

Les points composés sont A, B, C, A_1, B_1, C_1 .

Soit s une symétrie de centre Ω et P, P' deux points tels que $s(P) = P'$.

L'équation vectorielle $\overrightarrow{P\Omega} = \overrightarrow{\Omega P'}$ équivaut à:

$$\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{O\Omega}$$

Points purs

I, J, K, M

Pour déterminer Ω , nous devons calculer $\frac{\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP}}{2}$, mais nous ignorons si $s(A) = I$ ou J ou K . Comme la transformation s doit échanger le triplet ABC en le triplet IJK , nous contournons la difficulté en calculant la somme

$$3\overrightarrow{O\Omega} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}}{2}$$

qui implique

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{4}$$

En calculant successivement $-\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{O\Omega}$ avec $P = A$, puis B, C , nous déduisons que $s(A) = I, s(B) = J, s(C) = K$.

Ainsi, le triangle IJK est l'image du triangle ABC par une symétrie centrale de centre Ω , équilibarycentre de I, J, K, M .

On remarque que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} + 3\overrightarrow{OM}}{2}$$

donc on a aussi:

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

Exercice 7.3.2

On donne un triangle ABC et un point P non-situé sur l'une des droites $(AB), (AC), (BC)$. On désigne par M, N, R les milieux des cotés $(AB), (BC), (AC)$. Soit k un réel différent de -2 et h l'homothétie de centre P et de rapport k qui transforme les points M, N, R respectivement en C_1, A_1, B_1 .

Montrer que les droites $(AA_1), (BB_1), (CC_1)$ se coupent en un même point I dont on précisera la position sur chacune de ces droites.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M, N, R\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, P .

Les points composés sont M, N, R .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C, P

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{ON}$$

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{RC} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OR}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, M, N, P, R, A_1, B_1, C_1\}$

Les nouveaux points composés sont A_1, B_1, C_1 .

On a les découpages successifs:

$$\overrightarrow{O} = \overrightarrow{PC_1} - k\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OC_1} - k\overrightarrow{OM} + (k-1)\overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{O} = \overrightarrow{PA_1} - k\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{ON} + (k-1)\overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{O} = \overrightarrow{PB_1} - k\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OB_1} + (k-1)\overrightarrow{OP} - k\overrightarrow{OR}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\overrightarrow{O} = \overrightarrow{PC_1} - k\overrightarrow{PM} = \frac{-k\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC_1} + 2(k-1)\overrightarrow{OP}}{2}$$

$$\overrightarrow{O} = \overrightarrow{PA_1} - k\overrightarrow{PN} = \frac{2\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC} + 2(k-1)\overrightarrow{OP}}{2}$$

$$\overrightarrow{O} = \overrightarrow{PB_1} - k\overrightarrow{PR} = \frac{-k\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB_1} - k\overrightarrow{OC} + 2(k-1)\overrightarrow{OP}}{2}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} + 2(1-k)\overrightarrow{OP}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} + 2(1-k)\overrightarrow{OP}}{2}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} + 2(1-k)\overrightarrow{OP}}{2}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} + 2(1-k)\overrightarrow{OP}}{2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + 2(1-k)\overrightarrow{OP}}{2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + 2(1-k)\overrightarrow{OP}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, M, N, P, R, A_1, B_1, C_1, I_1\}$

Détermination du point $I_1 \in (AA_1) \cap (BB_1)$:

Le point I_1 est composé.

Comme $I_1 \in (AA_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OI_1} = (1 - \mu_1)\overrightarrow{OA_1} + \mu_1\overrightarrow{OA}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{2\mu_1\overrightarrow{OA} + k(1 - \mu_1)\overrightarrow{OB} + k(1 - \mu_1)\overrightarrow{OC} + (1 - k)(1 - \mu_1)\overrightarrow{OP}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, P

$$\mu_1, \quad \frac{k(1 - \mu_1)}{2}, \quad \frac{k(1 - \mu_1)}{2}, \quad (1 - k)(1 - \mu_1)$$

Comme $I_1 \in (BB_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OI_1} = (1 - \nu_1)\overrightarrow{OB_1} + \nu_1\overrightarrow{OB}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{k(1-\nu_1)\overrightarrow{OA} + 2\nu_1\overrightarrow{OB} + k(1-\nu_1)\overrightarrow{OC} + (1-k)(1-\nu_1)\overrightarrow{OP}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, P

$$\frac{k(1-\nu_1)}{2}, \quad \nu_1, \quad \frac{k(1-\nu_1)}{2}, \quad (1-k)(1-\nu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{k}{2+k} \quad \nu_1 = \frac{k}{2+k}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} + (2-2k)\overrightarrow{OP}}{2+k}$$

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} + (2-2k)\overrightarrow{OP}}{2+k}$$

Dessin = $\{A, B, C, M, N, P, R, A_1, B_1, C_1, I_1, I_2\}$

Détermination du point $I_2 \in (AA_1) \cap (CC_1)$:

Le point I_2 est composé.

Comme $I_2 \in (AA_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OI_2} = (1-\mu_1)\overrightarrow{OA_1} + \mu_1\overrightarrow{OA}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = \frac{2\mu_1\overrightarrow{OA} + k(1-\mu_1)\overrightarrow{OB} + k(1-\mu_1)\overrightarrow{OC} + (1-k)(1-\mu_1)\overrightarrow{OP}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, P

$$\mu_1, \quad \frac{k(1-\mu_1)}{2}, \quad \frac{k(1-\mu_1)}{2}, \quad (1-k)(1-\mu_1)$$

Comme $I_2 \in (CC_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OI_2} = (1-\nu_1)\overrightarrow{OC_1} + \nu_1\overrightarrow{OC}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = \frac{k(1-\nu_1)\overrightarrow{OA} + k(1-\nu_1)\overrightarrow{OB} + 2\nu_1\overrightarrow{OC} + (1-k)(1-\nu_1)\overrightarrow{OP}}{2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, P

$$\frac{k(1-\nu_1)}{2}, \quad \frac{k(1-\nu_1)}{2}, \quad \nu_1, \quad (1-k)(1-\nu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{k}{2+k} \quad \nu_1 = \frac{k}{2+k}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OI_2} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} + (2-2k)\overrightarrow{OP}}{2+k}$$

$$\overrightarrow{OI_2} = \frac{k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} + (2-2k)\overrightarrow{OP}}{2+k}$$

On a donc $\overrightarrow{OI_1} = \overrightarrow{OI_2}$, donc $I_1 = I_2$. De même, $I_1 = I_3$.

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AI_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AI_1} = \frac{-2\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} + (2-2k)\overrightarrow{OP}}{2+k}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1I_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1I_1} = \frac{2k\overrightarrow{OA} - k^2\overrightarrow{OB} - k^2\overrightarrow{OC} - (2k - 2k^2)\overrightarrow{OP}}{2(2+k)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AI_1} = \frac{-2}{k} \overrightarrow{A_1I_1}$$

CHAPITRE

8

Essai d'algorithmique

Ce chapitre esquisse l'algorithmique générale de résolution d'un exercice de géométrie vectorielle. Le lecteur informaticien peut d'emblée se reporter à la section 8.3.

La méthode informatique proposée est un classement informatique des points d'un exercice donné, en points purs et en points composés, avec obtention du descriptif de tout point composé en recourant systématiquement à la résolution d'un système linéaire. Pour une telle démarche, il s'avère impératif de supprimer des termes intuitifs de la géométrie et les remplacer par des symboles ou artifices réellement utilisables en programmation.

8.1 Points temporaires et formulation usuelle d'un l'exercice

La géométrie vectorielle utilise un vocabulaire intuitif dans lequel les concepts de vecteurs, de parallélisme, de translations, \dots sont considérés comme naturels car adaptés à nos perceptions humaines. La mise sur pied de méthodes automatiques de résolution doit formuler l'ensemble de ces concepts en termes de points: à cette fin, il convient d'introduire des **points temporaires** T_1, T_2, \dots .

- Ainsi, la phrase

"Une droite (Δ) coupe les côtés (BC), (AC), (AB) d'un triangle ABC en A_1, B_1, C_1 "

se modifie en

"Soient A_1 et B_1 des points situés sur les côtés (BC) et (AC) d'un triangle ABC .

La droite A_1B_1 coupe le côté (AB) en C_1 ".

- La phrase suivante

"Dans un tétraèdre $ABCD$, soit I un point du segment AB .

Le plan parallèle au plan (BCD), passant par I , coupe le segment (AC) en J et le segment \dots "

contient l'expression intuitive "plan parallèle". Elle se modifie en faisant appel à des points temporaires T_1 et T_2 permettant la description précise de ce plan parallèle sous forme d'un ensemble linéaire déterminé par 3 points. On obtient

”Dans un tétraèdre $ABCD$, soit I un point du segment AB .
 Soient T_1 et T_2 des points tels que $\overrightarrow{IT_1} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IT_2} = \overrightarrow{BD}$.
 Le plan (IT_1T_2) coupe le segment (AC) en J et le segment \dots ”

- La phrase

”Soit \vec{u} un vecteur quelconque et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur \vec{u} ...”

se modifie en utilisant des points temporaires, selon

”Soient T_1 et T_2 des points quelconques et $t_{\overrightarrow{T_1T_2}}$ la translation correspondante ... ”

Le concept de vecteur abstrait doit disparaître et devenir un concept lié à un couple de points.

8.2 Exemples d'intervention des points temporaires

Exercice 8.2.1

Les diagonales d'un quadrilatère convexe $ABCD$ se coupent en I . Les parallèles à (BC) et (CD) menées par I coupent respectivement (AB) en M et (AD) en N . Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (BD) .

Solution:

Dessin = $\{A, B, I, C, D\}$

Les points purs choisis sont A, B, I .

Les points composés sont C, D .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, I

$$\vec{0} = -\alpha \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = -\alpha \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + (-1 + \alpha) \overrightarrow{OI}$$

$$\vec{0} = -\beta \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = -\beta \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + (\beta - 1) \overrightarrow{OI}$$

avec α et β constantes réelles.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OD} = \beta \overrightarrow{OB} + (1 - \beta) \overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OD} = \beta \overrightarrow{OB} + (1 - \beta) \overrightarrow{OI}$$

La parallèle à la droite (BC) (resp. à la droite (CD)) passant par I est la droite (IT_1) (resp. la droite (IT_2)) avec T_1, T_2 points temporaires vérifiant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IT_1}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IT_2}$.

Dessin = $\{A, B, I, C, D, T_1, T_2\}$

Les points composés sont T_1, T_2 .

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= -\vec{BC} + \vec{IT}_1 = \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OI} + \vec{OT}_1 \\ \vec{0} &= -\vec{CD} + \vec{IT}_2 = \vec{OC} - \vec{OD} - \vec{OI} + \vec{OT}_2\end{aligned}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= -\vec{BC} + \vec{IT}_1 = -\alpha\vec{OA} + \vec{OB} + (-2 + \alpha)\vec{OI} + \vec{OT}_1 \\ \vec{0} &= -\vec{CD} + \vec{IT}_2 = \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB} + (-1 - \alpha + \beta)\vec{OI} + \vec{OT}_2\end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned}\vec{OT}_1 &= \alpha\vec{OA} - \vec{OB} + (2 - \alpha)\vec{OI} & \vec{OT}_1 &= \alpha\vec{OA} - \vec{OB} + (2 - \alpha)\vec{OI} \\ \vec{OT}_2 &= -\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + (1 + \alpha - \beta)\vec{OI} & \vec{OT}_2 &= -\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} \\ & & & + (1 + \alpha - \beta)\vec{OI}\end{aligned}$$

Dessin = {A, B, I, C, D, T₁, T₂, M}

Détermination du point M:

Le point M est composé.

Comme M ∈ (IT₁), on a, en choisissant les inconnues μ₁

$$\vec{OM} = \mu_1 \vec{OI} + (1 - \mu_1) \vec{OT}_1$$

On déduit:

$$\vec{OM} = \alpha(1 - \mu_1) \vec{OA} + (\mu_1 - 1) \vec{OB} + (2 - \alpha - \mu_1 + \alpha\mu_1) \vec{OI}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, I

$$\alpha(1 - \mu_1), \quad -1 + \mu_1, \quad 2 - \alpha - \mu_1 + \alpha\mu_1$$

Comme M ∈ (AB), on a, en choisissant les inconnues ν₁

$$\vec{OM} = \nu_1 \vec{OA} + (1 - \nu_1) \vec{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, I

$$\nu_1, \quad 1 - \nu_1, \quad 0$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ₁, ν₁ donne

$$\mu_1 = \frac{-2 + \alpha}{-1 + \alpha} \quad \nu_1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha}$$

On déduit que:

$$\vec{OM} = \frac{\alpha\vec{OA} - \vec{OB}}{-1 + \alpha} \qquad \vec{OM} = \frac{\alpha\vec{OA} - \vec{OB}}{-1 + \alpha}$$

Dessin = $\{A, B, I, C, D, T_1, T_2, M, N\}$

Détermination du point N:

Le point N est composé.

Comme $N \in (IT_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{ON} = \mu_1 \overrightarrow{OI} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = (-\alpha + \alpha\mu_1) \overrightarrow{OA} + (\beta - \beta\mu_1) \overrightarrow{OB} + (1 + \alpha - \beta - \alpha\mu_1 + \beta\mu_1) \overrightarrow{OI}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, I

$$\alpha(-1 + \mu_1), \quad \beta(1 - \mu_1), \quad 1 + \alpha - \beta - \alpha\mu_1 + \beta\mu_1$$

Comme $N \in (AD)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + \beta(1 - \nu_1) \overrightarrow{OB} + (1 - \beta - \nu_1 + \beta\nu_1) \overrightarrow{OI}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, I

$$\nu_1, \quad \beta(1 - \nu_1), \quad (-1 + \beta)(-1 + \nu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha} \quad \nu_1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} - \beta \overrightarrow{OB} + (\beta - 1) \overrightarrow{OI}}{-1 + \alpha}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} - \beta \overrightarrow{OB} + (\beta - 1) \overrightarrow{OI}}{-1 + \alpha}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{MN} . On a:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{(1 - \beta) \overrightarrow{OB} + (\beta - 1) \overrightarrow{OI}}{-1 + \alpha}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{BD} . On a:

$$\overrightarrow{BD} = (\beta - 1) \overrightarrow{OB} + (1 - \beta) \overrightarrow{OI}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{1 - \alpha} \overrightarrow{BD}$$

Exercice 8.2.2
 On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ et un point $A_1 \in]A, B[$. On désigne par B_1 le projeté de A_1 sur $[B, C]$ parallèlement à (AC) , par C_1 le projeté de B_1 sur $[C, D]$ parallèlement à (BD) , par D_1 le projeté de C_1 sur $[A, D]$ parallèlement à (AC) .
 Montrer que la figure $A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme.

Cet exercice se résoud traditionnellement par applications successives du théorème de Thalès: la solution obtenue est en général très courte. Il n'en va pas de même pour la solution automatique. La solution proposée pour cet exercice est purement informatique. Le terme "parallèlement" et le terme "projection", inadaptés à la démarche algorithmique disparaissent par introduction de points temporaires T_1, T_2, \dots permettant la manipulation du vocabulaire de la transformation géométrique. Ces points temporaires permettent de déterminer tous les points construits comme intersection de droites, chaque droite étant définie par deux points (nous évitons ici la représentation d'une droite par un point et un vecteur directeur). Par exemple, le point B_1 est défini comme l'intersection de la droite (BC) et de la droite (A_1T_1) où T_1 désigne un point temporaire vérifiant $\overrightarrow{A_1T_1} = \overrightarrow{AC}$.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, A_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C, D .

Le point A_1 est composé.

Points purs
 A, B, C, D

Désignons par k un réel fixe tel que l'on ait $\overrightarrow{AA_1} = k \overrightarrow{AB}$. On a le découpage:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} - k \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA_1} + (-1 + k) \overrightarrow{OA} - k \overrightarrow{OB}$$

On déduit le point composé:

$$\overrightarrow{OA_1} = (1 - k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{OA_1} = (1 - k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB}$$

Le point B_1 est défini comme l'intersection de la droite (BC) et de la droite (A_1T_1) où T_1 désigne un point temporaire vérifiant $\overrightarrow{A_1T_1} = \overrightarrow{AC}$.

Dessin = $\{A, B, C, D, A_1, T_1\}$.

Le point T_1 est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A_1T_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT_1}$$

On déduit la description du point composé:

$$\overrightarrow{OT_1} = -k \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad \overrightarrow{OT_1} = -k \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, A_1, T_1, B_1\}$.

Détermination du point B_1 :

Le point B_1 est composé.

Comme $B_1 \in (A_1T_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OB_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OB_1} = (-k + \mu_1)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1)\overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$-k + \mu_1, \quad k, \quad 1 - \mu_1, \quad 0$$

Comme $B_1 \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OB_1} = \nu_1\overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1)\overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1, \quad 0$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = k \quad \nu_1 = k$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB} + (1 - k)\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB} + (1 - k)\overrightarrow{OC}$$

Le point B_1 est défini comme l'intersection de la droite (CD) et de la droite (B_1T_2) où T_2 désigne un point temporaire vérifiant $\overrightarrow{B_1T_2} = \overrightarrow{BD}$.

Dessin = $\{A, B, C, D, A_1, T_1, B_1, T_2\}$.

Le point T_2 est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{B_1T_2} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OT_2}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{B_1T_2} = (-1 + k)\overrightarrow{OB} + (1 - k)\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OT_2}$$

On déduit la description du point composé:

$$\overrightarrow{OT_2} = (-1 + k)\overrightarrow{OB} + (1 - k)\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, A_1, T_1, B_1, T_2, C_1\}$.

Détermination du point C_1 :

Le point C_1 est composé.

Comme $C_1 \in (B_1T_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \mu_1\overrightarrow{OB_1} + (1 - \mu_1)\overrightarrow{OT_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_1} = (-1 + k + \mu_1)\overrightarrow{OB} + (1 - k)\overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1)\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OT_2} = (-1 + k)\overrightarrow{OB} + (1 - k)\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$0, \quad -1 + k + \mu_1, \quad 1 - k, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $C_1 \in (CD)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$0, \quad 0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = 1 - k \quad \nu_1 = 1 - k$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OC_1} = (1 - k) \overrightarrow{OC} + k \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = (1 - k) \overrightarrow{OC} + k \overrightarrow{OD}$$

Le point D_1 est défini comme l'intersection de la droite (AD) et de la droite (C_1T_3) où T_3 désigne un point temporaire vérifiant $\overrightarrow{C_1T_3} = \overrightarrow{CA}$.

Dessin = $\{A, B, C, D, A_1, T_1, B_1, T_2, C_1, T_3\}$.

Le point T_3 est composé.

On a le découpage:

$$\vec{0} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{C_1T_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT_3}$$

On déduit la description du point composé:

$$\overrightarrow{OT_3} = \overrightarrow{OA} - k \overrightarrow{OC} + k \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OT_3} = \overrightarrow{OA} - k \overrightarrow{OC} + k \overrightarrow{OD}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, A_1, T_1, B_1, T_2, C_1, T_3, D_1\}$.

Détermination du point D_1 :

Le point D_1 est composé.

Comme $D_1 \in (C_1T_3)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OD_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OD_1} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA} + (-k + \mu_1) \overrightarrow{OC} + k \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$1 - \mu_1, \quad 0, \quad -k + \mu_1, \quad k$$

Comme $D_1 \in (AD)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OD_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C, D

$$\nu_1, \quad 0, \quad 0, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = k \quad \nu_1 = 1 - k$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OD_1} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = (-1 + k)\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{D_1C_1}$. On a:

$$\overrightarrow{D_1C_1} = (-1 + k)\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$$

8.3 L'algorithmique de la géométrie vectorielle

Un exercice très général de géométrie vectorielle contient **des points définis par des équations vectorielles précises** et **des points définis comme intersections de sous espaces affines**: ces derniers points sont parfois délicats à analyser et ils n'ont aucune raison d'être choisis d'emblée comme points composés.

L'élaboration progressive du dessin géométrique avec un crayon est instructive à l'élaboration d'une algorithmique: elle montre que le dessin (associé à un exercice de géométrie) n'est pas un ensemble abstrait posé tel quel, mais un ensemble qui a subi une progression graphique jusqu' l'obtention d'un dessin final. En particulier, certaines droites ne peuvent pas être dessinées tant que d'autres droites, d'autres intersections n'ont pas pris place, au préalable, sur le support papier. La mise en place des points purs et des points composés de l'exercice doit respecter cette progression, ce qui signifie qu'il est impossible de brasser en une seule fois l'ensemble de toutes les équations vectorielles.

Les exercices se ramenant directement à une seule liste d'équations vectorielles n'offrent aucune difficulté théorique: la programmation par l'informatique d'un tel exercice est intéressante et facilitée par l'utilisation d'un programme symbolique.

Pour un exercice quelconque contenant des intersections de sous-espaces affines, nous devons déjà classer les points dans l'ordre de leur apparition en indiquant ceux qui sont des points d'intersections (ceci correspond à l'ordre dans lequel est effectué le dessin).

Nous désignons par des *lettres majuscules* les points associés à des relations vectorielles, et par des *lettres surmontées d'un trait*, les points associés à des intersections de sous-espaces affines.

Nous pouvons admettre que l'exercice se présente comme suit. Soit

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, \overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_{k_1}}, B_1, B_2, \dots, B_{n_2}, \overline{N_1}, \overline{N_2}, \dots, \overline{N_{k_2}}, \dots, \text{etc}\}$$

la liste progressive de tous les points de l'exercice, avec

- $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}\}$ points reliés entre eux par des équations vectorielles précises n'utilisant que le vocabulaire $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}\}$.
- $\{\overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_{k_1}}\}$ points issus d'intersection de sous-espaces affines dont la description n'utilise que le vocabulaire $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}\}$.
- $\{B_1, B_2, \dots, B_{n_2}\}$ points reliés entre eux par des équations vectorielles n'utilisant que le vocabulaire $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, \overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_{k_1}}\}$.
- $\{\overline{N_1}, \overline{N_2}, \dots, \overline{N_{k_2}}\}$ points issus d'intersection de sous-espaces affines dont la description n'utilise que le vocabulaire $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, \overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_{k_1}}, B_1, B_2, \dots, B_{n_2}\}$.
- Et ainsi de suite.

L'algorithmique proposée considère déjà le groupe $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}\}$. Comme indiqué dans le chapitre *Initiation*, le découpage automatique aboutit à une liste d'équations vectorielles (soit p le nombre d'équations de cette liste) du type

$$\begin{cases} a_{11} \overrightarrow{OA_1} + a_{12} \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_{1(n_1-1)} \overrightarrow{OA_{n_1-1}} + (1 - \sum_{j=1}^{n_1-1} a_{1j}) \overrightarrow{OA_{n_1}} = \overrightarrow{0} \\ a_{21} \overrightarrow{OA_1} + a_{22} \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_{2(n_1-1)} \overrightarrow{OA_{n_1-1}} + (1 - \sum_{j=1}^{n_1-1} a_{2j}) \overrightarrow{OA_{n_1}} = \overrightarrow{0} \\ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = \overrightarrow{0} \\ a_{p1} \overrightarrow{OA_1} + a_{p2} \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_{p(n_1-1)} \overrightarrow{OA_{n_1-1}} + (1 - \sum_{j=1}^{n_1-1} a_{pj}) \overrightarrow{OA_{n_1}} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

où les a_{ij} sont des coefficients souvent réels, parfois symboliques (α, β, \dots). La résolution de ce système linéaire détermine un ensemble de points purs $P(1)$ et un ensemble de points composés $C(1)$.

L'algorithmique considère ensuite le groupe $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, \overline{M_1}\}$. Le point $\overline{M_1}$ appartient à l'intersection de plusieurs sous-espaces affines $\text{Aff}_1, \text{Aff}_2, \dots, \text{Aff}_p$. Chaque sous-espace affine qui n'est pas défini clairement à l'aide des points de la liste $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}\}$ doit obtenir une re-définition en construisant des points temporaires T_j s'appuyant sur la liste $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}\}$ (ces préparatifs visent à supprimer les termes "direction", "parallélisme"): chaque point T_j est un point composé qui est associé à une équation vectorielle simple le représentant.

Au terme de ces adaptations du vocabulaire, on obtient une nouvelle liste de points $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, T_1, T_2, \dots\}$ liés entre eux par des équations vectorielles. Cette liste d'équations vectorielles engendre par découpage automatique, un nouveau système linéaire dont la résolution détermine un nouvel ensemble de points purs $P(2)$ et un nouvel ensemble de points composés $C(2)$.

Maintenant, l'appartenance d'un point I au sous-espace affine Aff_j engendre une équation vectorielle avec des coefficients indéterminés et utilisant le vocabulaire $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, T_1, T_2, \dots\}$. Par substitutions des expressions des points composés $C(2)$, on obtient une équation du style $\overrightarrow{OI} = (Eq_j)$: chaque expression (Eq_j) est une combinaison linéaire des points purs $P(2)$ dont les coefficients s'expriment à partir des coefficients indéterminés.

A ce stade, il est impératif de contrôler le nombre de points purs.

- Si le nombre de points purs est de 3 (resp. de 4, de n) pour le plan (resp. pour l'espace \mathbf{R}^3 , pour l'espace \mathbf{R}^n), la résolution du système

$$(Eq_1) = (Eq_2) = \dots = (Eq_p)$$

positionne les coefficients indéterminés des diverses équations les uns par rapport aux autres ou donne (parfois) leur valeur exacte. En substituant ces solutions dans (Eq_1) , on obtient le descriptif du point \overline{M}_1 . On poursuit ainsi jusqu'à \overline{M}_{k_1} . Puis, on brasse le groupe

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_{k_1}, B_1, B_2, \dots, B_{n_2}\}$$

qui déterminera un nouvel ensemble de points purs $P(3)$ et un ensemble de points composés $C(3)$. Et ainsi de suite.

- Si le nombre de points purs est excessif, la résolution du système

$$(Eq_1) = (Eq_2) = \dots = (Eq_p)$$

ne doit pas être mise en oeuvre. Deux solutions A) ou B) sont possibles:

- A). On diminue le nombre de points purs en le ramenant à 3 (resp. de 4, de n) pour le plan (resp. pour l'espace \mathbf{R}^3 , pour l'espace \mathbf{R}^n) et on attribue des coordonnées barycentriques arbitraires pour les autres points purs. Le système

$$(Eq_1) = (Eq_2) = \dots = (Eq_p)$$

est alors reformulé avec le nouveau système de points purs et sa résolution obtient ainsi le descriptif du point \overline{M}_1 . On poursuit alors comme indiqué précédemment. Cette façon de procéder est la plus simple à programmer.

- B). On reprend toutes les équations du style $\overrightarrow{OI} = (Eq_j)$. Dans chacune d'elle, on remplace O par I et on brasse toutes les équations vectorielles depuis le départ (le lecteur consultera l'exercice 3.2.7 qui illustre explicitement la méthode). La résolution du système linéaire détermine le descriptif du point \overline{M}_1 . Cette méthode se heurte à des calculs rapidement compliqués.

CHAPITRE

9

Le théorème de Ceva

9.1 Le théorème de Ceva en dimension n

Exercice 9.1.1 *Théorème de Ceva*

Dans un espace affine de dimension n , on donne un polygone de n côtés, de sommets A_1, A_2, \dots, A_n et un point I . On suppose que, pour $i = 1, \dots, n$, l'hyperplan (H_i) passant par I et les $(n - 2)$ points $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots$ (avec la convention $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2$) coupe la droite $(A_i A_{i+1})$ en un unique point I_i distinct de A_i et A_{i+1} .

Alors

$$\frac{\overline{I_1 A_1}}{\overline{I_1 A_2}} \cdot \frac{\overline{I_2 A_2}}{\overline{I_2 A_3}} \dots \frac{\overline{I_i A_i}}{\overline{I_i A_{i+1}}} \dots \frac{\overline{I_{n-1} A_{n-1}}}{\overline{I_{n-1} A_n}} \cdot \frac{\overline{I_n A_n}}{\overline{I_n A_1}} = (-1)^n$$

Réciproquement, la validité de cette formule implique que les hyperplans (K_i) (chaque (K_i) est défini par I_i et les $(n - 2)$ points $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots$, le point I_i étant distinct de A_i et A_{i+1}) se coupent en un unique point I .

On notera que, pour n pair, les points I_1, I_2, \dots, I_n appartiennent à un même hyperplan (d'après la réciproque du théorème de Menelaüs).

Afin de ne pas proposer au lecteur une solution concentrée et incompréhensible du cas général, nous traitons explicitement le cas $n = 5$ qui profile la démonstration du cas n quelconque.

9.2 La démonstration directe en dimension 5

Solution:

Nous devons montrer que

$$\frac{\overline{I_1 A_1}}{\overline{I_1 A_2}} \cdot \frac{\overline{I_2 A_2}}{\overline{I_2 A_3}} \cdot \frac{\overline{I_3 A_3}}{\overline{I_3 A_4}} \cdot \frac{\overline{I_4 A_4}}{\overline{I_4 A_5}} \cdot \frac{\overline{I_5 A_5}}{\overline{I_5 A_1}} = (-1)^5$$

Le point I est barycentre des points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , donc il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \alpha_1 \overrightarrow{A_1 I} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 I} + \alpha_3 \overrightarrow{A_3 I} + \alpha_4 \overrightarrow{A_4 I} \\ &\quad + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{A_5 I} \end{aligned}$$

Les points purs choisis sont A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

On a le découpage:

Points purs
 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \overrightarrow{A_1 I} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 I} + \alpha_3 \overrightarrow{A_3 I} + \alpha_4 \overrightarrow{A_4 I} \\ & + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{A_5 I} \\ & = -\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} - \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} - \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} - \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} \\ & + (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OI} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} & = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} \\ & + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

Détermination du point I_1 :

Le point I_1 est composé.

Comme $I_1 \in (A_1 A_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OI_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_2}$$

Comme $I_1 \in (A_3 A_4 A_5 I)$, on a, en choisissant les inconnues μ_3, μ_4, μ_5

$$\overrightarrow{OI_1} = \mu_3 \overrightarrow{OA_3} + \mu_4 \overrightarrow{OA_4} + \mu_5 \overrightarrow{OA_5} + (1 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5) \overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI_1} & = (\alpha_1 - \alpha_1 \mu_3 - \alpha_1 \mu_4 - \alpha_1 \mu_5) \overrightarrow{OA_1} \\ & + (\alpha_2 - \alpha_2 \mu_3 - \alpha_2 \mu_4 - \alpha_2 \mu_5) \overrightarrow{OA_2} \\ & + (\alpha_3 + \mu_3 - \alpha_3 \mu_3 - \alpha_3 \mu_4 - \alpha_3 \mu_5) \overrightarrow{OA_3} \\ & + (\alpha_4 - \alpha_4 \mu_3 + \mu_4 - \alpha_4 \mu_4 - \alpha_4 \mu_5) \overrightarrow{OA_4} \\ & + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \mu_3 + \alpha_1 \mu_3 + \alpha_2 \mu_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_4 \mu_3 \\ & - \mu_4 + \alpha_1 \mu_4 + \alpha_2 \mu_4 + \alpha_3 \mu_4 + \alpha_4 \mu_4 + \alpha_1 \mu_5 + \alpha_2 \mu_5 + \alpha_3 \mu_5 + \alpha_4 \mu_5) \overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

ce qui donne pour système linéaire

$$\begin{aligned} -\alpha_1(-1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5) & = \nu_1 \\ -\alpha_2(-1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5) & = 1 - \nu_1 \\ \alpha_3 + \mu_3 - \alpha_3 \mu_3 - \alpha_3 \mu_4 - \alpha_3 \mu_5 & = 0 \\ \alpha_4 - \alpha_4 \mu_3 + \mu_4 - \alpha_4 \mu_4 - \alpha_4 \mu_5 & = 0 \end{aligned}$$

On notera que la dernière équation est combinaison linéaire des autres (la somme des coefficients vaut 1).

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_3, \mu_4, \mu_5, \nu_1$ donne

$$\nu_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \mu_3 = \frac{-\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \mu_4 = \frac{-\alpha_4}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \mu_5 = \frac{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \qquad \overrightarrow{OI_1} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_1A_1}$. On a:

$$\overrightarrow{I_1A_1} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{OA_1} - \alpha_1 \overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_1A_2}$. On a:

$$\overrightarrow{I_1A_2} = \frac{-\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_1 \overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{I_1A_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \overrightarrow{I_1A_2}$$

Détermination du point I_2 :

Le point I_2 est composé.

Comme $I_2 \in (A_2A_3)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_2

$$\overrightarrow{OI_2} = \nu_2 \overrightarrow{OA_2} + (1 - \nu_2) \overrightarrow{OA_3}$$

Comme $I_2 \in (A_1A_4A_5I)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1, μ_4, μ_5

$$\overrightarrow{OI_2} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_4 \overrightarrow{OA_4} + \mu_5 \overrightarrow{OA_5} + (1 - \mu_1 - \mu_4 - \mu_5) \overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI_2} &= (\alpha_1 + \mu_1 - \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_4 - \alpha_1\mu_5) \overrightarrow{OA_1} \\ &+ (\alpha_2 - \alpha_2\mu_1 - \alpha_2\mu_4 - \alpha_2\mu_5) \overrightarrow{OA_2} \\ &+ (\alpha_3 - \alpha_3\mu_1 - \alpha_3\mu_4 - \alpha_3\mu_5) \overrightarrow{OA_3} \\ &+ (\alpha_4 - \alpha_4\mu_1 + \mu_4 - \alpha_4\mu_4 - \alpha_4\mu_5) \overrightarrow{OA_4} \\ &+ (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \mu_1 + \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_1 + \alpha_3\mu_1 + \alpha_4\mu_1 \\ &- \mu_4 + \alpha_1\mu_4 + \alpha_2\mu_4 + \alpha_3\mu_4 + \alpha_4\mu_4 + \alpha_1\mu_5 + \alpha_2\mu_5 + \alpha_3\mu_5 + \alpha_4\mu_5) \overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

ce qui donne pour système linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \mu_1 - \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_4 - \alpha_1\mu_5, &= 0 \\ -\alpha_2(-1 + \mu_1 + \mu_4 + \mu_5) &= \nu_2 \\ -\alpha_3(-1 + \mu_1 + \mu_4 + \mu_5), &= 1 - \nu_2 \\ \alpha_4 - \alpha_4\mu_1 + \mu_4 - \alpha_4\mu_4 - \alpha_4\mu_5 &= 0 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_1, \mu_4, \mu_5, \nu_2$ donne

$$\nu_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} \quad \mu_1 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3} \quad \mu_4 = \frac{-\alpha_4}{\alpha_2 + \alpha_3} \quad \mu_5 = \frac{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OI_2} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3}}{\alpha_2 + \alpha_3} \qquad \overrightarrow{OI_2} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3}}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_2A_2}$. On a:

$$\overrightarrow{I_2A_2} = \frac{\alpha_3 \overrightarrow{OA_2} - \alpha_2 \overrightarrow{OA_3}}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_2A_3}$. On a:

$$\overrightarrow{I_2A_3} = \frac{-\alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_3}}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{I_2A_2} = \frac{-\alpha_3}{\alpha_2} \overrightarrow{I_2A_3}$$

Détermination du point I_3 :

Le point I_3 est composé.

Comme $I_3 \in (A_3A_4)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_3

$$\overrightarrow{OI_3} = \nu_3 \overrightarrow{OA_3} + (1 - \nu_3) \overrightarrow{OA_4}$$

Comme $I_3 \in (A_1A_2A_5I)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1, μ_2, μ_5

$$\overrightarrow{OI_3} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \mu_5 \overrightarrow{OA_5} + (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_5) \overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI_3} &= (\alpha_1 + \mu_1 - \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_2 - \alpha_1\mu_5) \overrightarrow{OA_1} \\ &+ (\alpha_2 - \alpha_2\mu_1 + \mu_2 - \alpha_2\mu_2 - \alpha_2\mu_5) \overrightarrow{OA_2} \\ &+ (\alpha_3 - \alpha_3\mu_1 - \alpha_3\mu_2 - \alpha_3\mu_5) \overrightarrow{OA_3} \\ &+ (\alpha_4 - \alpha_4\mu_1 - \alpha_4\mu_2 - \alpha_4\mu_5) \overrightarrow{OA_4} \\ &+ (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \mu_1 + \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_1 + \alpha_3\mu_1 + \alpha_4\mu_1 \\ &- \mu_2 + \alpha_1\mu_2 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_2 + \alpha_4\mu_2 + \alpha_1\mu_5 + \alpha_2\mu_5 + \alpha_3\mu_5 + \alpha_4\mu_5) \overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

ce qui donne pour système

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \mu_1 - \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_2 - \alpha_1\mu_5 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_2\mu_1 + \mu_2 - \alpha_2\mu_2 - \alpha_2\mu_5 &= 0 \\ -\alpha_3(-1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_5) &= \nu_3 \\ -\alpha_4(-1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_5) &= 1 - \nu_3 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_1, \mu_2, \mu_5, \nu_3$ donne

$$\nu_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \alpha_4} \quad \mu_1 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_3 + \alpha_4} \quad \mu_2 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_3 + \alpha_4} \quad \mu_5 = \frac{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OI_3} = \frac{\alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4}}{\alpha_3 + \alpha_4} \qquad \overrightarrow{OI_3} = \frac{\alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4}}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_3A_3}$. On a:

$$\overrightarrow{I_3A_3} = \frac{\alpha_4 \overrightarrow{OA_3} - \alpha_3 \overrightarrow{OA_4}}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_3A_4}$. On a:

$$\overrightarrow{I_3A_4} = \frac{-\alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4}}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{I_3A_3} = \frac{-\alpha_4}{\alpha_3} \overrightarrow{I_3A_4}$$

Détermination du point I_4 :

Le point I_4 est composé.

Comme $I_4 \in (A_4A_5)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_4

$$\overrightarrow{OI_4} = \nu_4 \overrightarrow{OA_4} + (1 - \nu_4) \overrightarrow{OA_5}$$

Comme $I_4 \in (A_1A_2A_3I)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1, μ_2, μ_3

$$\overrightarrow{OI_4} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \mu_3 \overrightarrow{OA_3} + (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3) \overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI_4} &= (\alpha_1 + \mu_1 - \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_2 - \alpha_1\mu_3) \overrightarrow{OA_1} \\ &+ (\alpha_2 - \alpha_2\mu_1 + \mu_2 - \alpha_2\mu_2 - \alpha_2\mu_3) \overrightarrow{OA_2} \\ &+ (\alpha_3 - \alpha_3\mu_1 - \alpha_3\mu_2 + \mu_3 - \alpha_3\mu_3) \overrightarrow{OA_3} \\ &+ (\alpha_4 - \alpha_4\mu_1 - \alpha_4\mu_2 - \alpha_4\mu_3) \overrightarrow{OA_4} \\ &+ (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \mu_1 + \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_1 + \alpha_3\mu_1 + \alpha_4\mu_1 \\ &- \mu_2 + \alpha_1\mu_2 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_2 + \alpha_4\mu_2 - \mu_3 + \alpha_1\mu_3 + \alpha_2\mu_3 + \alpha_3\mu_3 + \alpha_4\mu_3) \overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

ce qui donne pour système

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \mu_1 - \alpha_1\mu_1 - \alpha_1\mu_2 - \alpha_1\mu_3, &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_2\mu_1 + \mu_2 - \alpha_2\mu_2 - \alpha_2\mu_3, &= 0 \\ \alpha_3 - \alpha_3\mu_1 - \alpha_3\mu_2 + \mu_3 - \alpha_3\mu_3, &= 0 \\ -\alpha_4(-1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= \nu_4 \\ (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(-1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= 1 - \nu_4 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_4$ donne

$$\begin{aligned} \nu_4 &= \frac{-\alpha_4}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} & \mu_1 &= \frac{\alpha_1}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \mu_2 &= \frac{\alpha_2}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} & \mu_3 &= \frac{\alpha_3}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OI_4} = \frac{-\alpha_4 \overrightarrow{OA_4} + (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_4A_4}$. On a:

$$\overrightarrow{I_4A_4} = \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_4} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

$$\overrightarrow{OI_4} = \frac{-\alpha_4 \overrightarrow{OA_4}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_4A_5}$. On a:

$$\overrightarrow{I_4A_5} = \frac{\alpha_4 \overrightarrow{OA_4} - \alpha_4 \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{I_4A_4} = \frac{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_4} \overrightarrow{I_4A_5}$$

Détermination du point I_5 :

Le point I_5 est composé.

Comme $I_5 \in (A_5A_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_5

$$\overrightarrow{OI_5} = (1 - \nu_5) \overrightarrow{OA_1} + \nu_5 \overrightarrow{OA_5}$$

Comme $I_5 \in (A_2A_3A_4I)$, on a, en choisissant les inconnues μ_2, μ_3, μ_4

$$\overrightarrow{OI_5} = \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \mu_3 \overrightarrow{OA_3} + \mu_4 \overrightarrow{OA_4} + (1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4) \overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI_5} &= (\alpha_1 - \alpha_1\mu_2 - \alpha_1\mu_3 - \alpha_1\mu_4) \overrightarrow{OA_1} \\ &+ (\alpha_2 + \mu_2 - \alpha_2\mu_2 - \alpha_2\mu_3 - \alpha_2\mu_4) \overrightarrow{OA_2} \\ &+ (\alpha_3 - \alpha_3\mu_2 + \mu_3 - \alpha_3\mu_3 - \alpha_3\mu_4) \overrightarrow{OA_3} \\ &+ (\alpha_4 - \alpha_4\mu_2 - \alpha_4\mu_3 + \mu_4 - \alpha_4\mu_4) \overrightarrow{OA_4} \\ &+ (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \mu_2 + \alpha_1\mu_2 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_2 + \alpha_4\mu_2 \\ &- \mu_3 + \alpha_1\mu_3 + \alpha_2\mu_3 + \alpha_3\mu_3 + \alpha_4\mu_3 - \mu_4 + \alpha_1\mu_4 + \alpha_2\mu_4 + \alpha_3\mu_4 + \alpha_4\mu_4) \overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

ce qui donne pour système

$$\begin{aligned} -\alpha_1(-1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4), &= 1 - \nu_5 \\ \alpha_2 + \mu_2 - \alpha_2\mu_2 - \alpha_2\mu_3 - \alpha_2\mu_4 &= 0 \\ \alpha_3 - \alpha_3\mu_2 + \mu_3 - \alpha_3\mu_3 - \alpha_3\mu_4 &= 0 \\ \alpha_4 - \alpha_4\mu_2 - \alpha_4\mu_3 + \mu_4 - \alpha_4\mu_4 &= 0 \\ (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(-1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) &= \nu_5 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \nu_5$ donne

$$\nu_5 = \frac{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \quad \mu_2 = \frac{\alpha_2}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

$$\mu_3 = \frac{\alpha_3}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \quad \mu_4 = \frac{\alpha_4}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OI_5} = \frac{-\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_5A_5}$. On a:

$$\overrightarrow{I_5A_5} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} - \alpha_1 \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

$$\overrightarrow{OI_5} = \frac{-\alpha_1 \overrightarrow{OA_1}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} + \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_5A_1}$. On a:

$$\overrightarrow{I_5A_1} = \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_1} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{I_5A_5} = \frac{\alpha_1}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \overrightarrow{I_5A_1}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{I_1A_1}}{\overline{I_1A_2}} \cdot \frac{\overline{I_2A_2}}{\overline{I_2A_3}} \cdot \frac{\overline{I_3A_3}}{\overline{I_3A_4}} \cdot \frac{\overline{I_4A_4}}{\overline{I_4A_5}} \cdot \frac{\overline{I_5A_5}}{\overline{I_5A_1}} \\ &= \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{-\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{-\alpha_4}{\alpha_3} \cdot \frac{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_4} \cdot \frac{\alpha_1}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

9.3 La démonstration de la réciproque en dimension 5

Considérons les 4 fractions

$$\frac{\overline{I_1A_1}}{\overline{I_1A_2}} \quad \frac{\overline{I_2A_2}}{\overline{I_2A_3}} \quad \frac{\overline{I_3A_3}}{\overline{I_3A_4}} \quad \frac{\overline{I_4A_4}}{\overline{I_4A_5}}$$

de valeurs respectives a, b, c, d distinctes de 0 et de ± 1 . Il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tels que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} = a \\ \frac{-\alpha_3}{\alpha_2} = b \\ \frac{-\alpha_4}{\alpha_3} = c \\ \frac{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_4} = d \end{array} \right.$$

En effet, en fixant une valeur non-nulle pour α_1 , les 3 premières équations déterminent α_2, α_3 en fonction de α_1 et la dernière équation détermine alors α_4 .

Les points purs choisis sont A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

Les points composés sont I_1, I_2, I_3, I_4 .

Points purs
 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha_1 \overrightarrow{I_1 A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{I_1 A_2} = (-\alpha_1 - \alpha_2) \overrightarrow{OI_1} + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} \\ \vec{0} &= \alpha_2 \overrightarrow{I_2 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{I_2 A_3} = (-\alpha_2 - \alpha_3) \overrightarrow{OI_2} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} \\ \vec{0} &= \alpha_3 \overrightarrow{I_3 A_3} + \alpha_4 \overrightarrow{I_3 A_4} = (-\alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OI_3} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} \\ \vec{0} &= \alpha_4 \overrightarrow{I_4 A_4} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{I_4 A_5} \\ &= (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \overrightarrow{OI_4} \\ &\quad + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}\end{aligned}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\overrightarrow{OI_2} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3}}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

$$\overrightarrow{OI_2} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3}}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

$$\overrightarrow{OI_3} = \frac{\alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4}}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

$$\overrightarrow{OI_3} = \frac{\alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4}}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

$$\overrightarrow{OI_4} = \frac{-\alpha_4 \overrightarrow{OA_4} + (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Soit I le point défini comme barycentre de

$$(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3), (A_4, \alpha_4), (A_5, 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI_4} &= \frac{-\alpha_4 \overrightarrow{OA_4}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ &\quad + \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\end{aligned}$$

Le point I est composé.

On a le découpage:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha_1 \overrightarrow{A_1 I} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 I} + \alpha_3 \overrightarrow{A_3 I} + \alpha_4 \overrightarrow{A_4 I} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{A_5 I} \\ &= -\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} - \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} - \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} - \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} \\ &\quad + (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OI}\end{aligned}$$

On déduit la description du point composé:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} \\ &\quad + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}\end{aligned}$$

Nous devons montrer que I appartient aux sous-espaces affines engendrés respectivement par

$$(A_3, A_4, A_5, I_1) \quad (A_1, A_4, A_5, I_2) \quad (A_1, A_2, A_5, I_3) \quad (A, A_2, A_3, I_4)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ &\quad + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} \\ &\quad + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}\end{aligned}$$

Il nous suffit de tester l'appartenance à un seul sous-espace affine: pour cela, déterminons un point $R \in (A_3 A_4 A_5 I_1) \cap (I A_2)$.

Détermination du point $R \in (A_3 A_4 A_5 I_1) \cap (I A_2)$:

Le point R est composé.

Comme $R \in (A_3A_4A_5I_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_3, μ_4, μ_5

$$\overrightarrow{OR} = (1 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5)\overrightarrow{OI_1} + \mu_3\overrightarrow{OA_3} + \mu_4\overrightarrow{OA_4} + \mu_5\overrightarrow{OA_5}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_1\mu_3 - \alpha_1\mu_4 - \alpha_1\mu_5)\overrightarrow{OA_1} + (\alpha_2 - \alpha_2\mu_3 - \alpha_2\mu_4 - \alpha_2\mu_5)\overrightarrow{OA_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ &+ \frac{(\alpha_1\mu_3 + \alpha_2\mu_3)\overrightarrow{OA_3} + (\alpha_1\mu_4 + \alpha_2\mu_4)\overrightarrow{OA_4} + (\alpha_1\mu_5 + \alpha_2\mu_5)\overrightarrow{OA_5}}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{aligned}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

$$\frac{-\alpha_1(-1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5)}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \frac{-\alpha_2(-1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5)}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \mu_3, \quad \mu_4, \quad \mu_5$$

Comme $R \in (IA_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_2

$$\overrightarrow{OR} = (1 - \nu_2)\overrightarrow{OA_2} + \nu_2\overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \alpha_1\nu_2\overrightarrow{OA_1} + (1 - \nu_2 + \alpha_2\nu_2)\overrightarrow{OA_2} + \alpha_3\nu_2\overrightarrow{OA_3} + \alpha_4\nu_2\overrightarrow{OA_4} \\ &+ (\nu_2 - \alpha_1\nu_2 - \alpha_2\nu_2 - \alpha_3\nu_2 - \alpha_4\nu_2)\overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

$$\alpha_1\nu_2, \quad 1 - \nu_2 + \alpha_2\nu_2, \quad \alpha_3\nu_2, \quad \alpha_4\nu_2, \quad -(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\nu_2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_3, \mu_4, \mu_5, \nu_2$ donne

$$\mu_3 = \alpha_3 \quad \mu_4 = \alpha_4 \quad \mu_5 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \quad \nu_2 = 1$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \alpha_3\overrightarrow{OA_3} + \alpha_4\overrightarrow{OA_4} \\ &+ (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)\overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

donc $R = I$. Ainsi, I appartient aux sous-espaces affines engendrés par (A_3, A_4, A_5, I_1) , (A_1, A_4, A_5, I_2) , (A_1, A_2, A_5, I_3) , (A, A_2, A_3, I_4) . Soit I_5 le point tel que

$$\frac{\overline{I_5A_1}}{\overline{I_5A_5}} = \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\alpha_1}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} \\ &+ \alpha_3\overrightarrow{OA_3} + \alpha_4\overrightarrow{OA_4} \\ &+ (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)\overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

Le point I_5 est composé.

On a le découpage:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O} &= \alpha_1\overrightarrow{I_5A_1} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)\overrightarrow{I_5A_5} \\ &= \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + (-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\overrightarrow{OI_5} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)\overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

On déduit la description du point composé:

$$\overrightarrow{OI_5} = \frac{-\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

Il nous reste à établir que le sous-espace affine $(A_2A_3A_4I_5)$ contient le point I . Pour cela, déterminons un point $H \in (A_2A_3A_4I_5) \cap (A_1I)$.

Détermination du point $H \in (A_2A_3A_4I_5) \cap (A_1I)$:

Le point H est composé.

Comme $H \in (A_2A_3A_4I_5)$, on a, en choisissant les inconnues μ_2, μ_3, μ_4

$$\overrightarrow{OH} = \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \mu_3 \overrightarrow{OA_3} + \mu_4 \overrightarrow{OA_4} + (1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4) \overrightarrow{OI_5}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \frac{(-\alpha_1 + \alpha_1\mu_2 + \alpha_1\mu_3 + \alpha_1\mu_4) \overrightarrow{OA_1} + (-\mu_2 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_2 + \alpha_4\mu_2) \overrightarrow{OA_2}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \\ &+ \frac{(-\mu_3 + \alpha_2\mu_3 + \alpha_3\mu_3 + \alpha_4\mu_3) \overrightarrow{OA_3} + (-\mu_4 + \alpha_2\mu_4 + \alpha_3\mu_4 + \alpha_4\mu_4) \overrightarrow{OA_4}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \\ &+ \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \mu_2 - \alpha_1\mu_2 - \alpha_2\mu_2 - \alpha_3\mu_2 - \alpha_4\mu_2 + \mu_3 - \alpha_1\mu_3 - \alpha_2\mu_3 - \alpha_3\mu_3 - \alpha_4\mu_3 + \mu_4 - \alpha_1\mu_4 - \alpha_2\mu_4 - \alpha_3\mu_4 - \alpha_4\mu_4) \overrightarrow{OA_5}}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \end{aligned}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

$$\frac{\alpha_1(-1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \mu_4, \quad \frac{-(-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(-1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)}{-1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

Comme $H \in (A_1I)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OH} = \nu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OI}$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= (\alpha_1 + \nu_1 - \alpha_1\nu_1) \overrightarrow{OA_1} + (\alpha_2 - \alpha_2\nu_1) \overrightarrow{OA_2} \\ &+ (\alpha_3 - \alpha_3\nu_1) \overrightarrow{OA_3} + (\alpha_4 - \alpha_4\nu_1) \overrightarrow{OA_4} \\ &+ (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \nu_1 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1 + \alpha_3\nu_1 + \alpha_4\nu_1) \overrightarrow{OA_5} \end{aligned}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \nu_1 - \alpha_1\nu_1, \quad -\alpha_2(-1 + \nu_1), \quad -\alpha_3(-1 + \nu_1) \\ -\alpha_4(-1 + \nu_1), \quad (-1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(-1 + \nu_1) \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \nu_1$ donne

$$\mu_2 = \alpha_2 \quad \mu_3 = \alpha_3 \quad \mu_4 = \alpha_4 \quad \nu_1 = 0$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OH} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OA_4} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \overrightarrow{OA_5}$$

Donc H est le point I et les sous-espaces affines mentionnés passent tous par ce point.

Table des matières

Préface	0
Chap 1 Initiation	1
1 . 1 Préliminaires	1
1 . 2 La résolution automatique des exercices	1
1 . 3 Un exemple instructif	4
1 . 4 Le choix des points purs et des points composés	8
1 . 5 Aspects de la méthode analytique et de la méthode informatique	9
1 . 6 Exemples	11
Chap 2 Introduction au barycentre	19
2 . 1 Barycentres dans le plan	19
2 . 2 Barycentres dans l'espace	21
Chap 3 Intersections de droites dans le plan	26
3 . 1 Intersections de deux droites	26
3 . 2 Exemples	27
3 . 3 Au delà de 3 points purs	39
Chap 4 Théorèmes classiques du plan	42
4 . 1 Division harmonique et Quadrilatère complet	42
4 . 2 Théorèmes de Menelaüs et de Ceva	48
4 . 3 Une formule originale	56
Chap 5 Intersections dans l'espace	59
5 . 1 Intersections dans l'espace usuel \mathbf{R}^3	59
5 . 2 Exemples	59
Chap 6 Barycentres et intersections	72
6 . 1 Barycentres et intersections dans le plan	72
6 . 2 Barycentres et intersections dans l'espace	76
Chap 7 Transformations et lieux géométriques	83
7 . 1 Lieux géométriques	83
7 . 2 Composées de translations et d'homothéties	84
7 . 3 Exemples divers	87
Chap 8 Essai d'algorithmique	92
8 . 1 Points temporaires et formulation usuelle d'un l'exercice	92
8 . 2 Exemples d'intervention des points temporaires	93
8 . 3 L' algorithmique de la géométrie vectorielle	99
Chap 9 Le théorème de Ceva	102
9 . 1 Le théorème de Ceva en dimension n	102
9 . 2 La demonstration directe en dimension 5	102
9 . 3 La démonstration de la réciproque en dimension 5	108