

CHAPITRE

4

Théorèmes classiques du plan

Ce chapitre étudie des théorèmes classiques du plan, notamment le théorème de Menelaüs et le théorème de Ceva: nous poursuivons ainsi la méthode mise en oeuvre jusqu'ici.

Ces théorèmes peuvent sembler désuets en regard à leur date d'élaboration, en réalité leur utilité devient évidente pour l'élaboration (ou la simplification) d'une méthode informatique. Par exemple, pour une droite (Δ) rencontrant les côtés (BC), (CA) et (BA) respectivement en A' , B' et C' , le théorème de Menelaüs génère directement un système d'équations vectorielles reliant les points A, B, C aux points A', B', C' . Les équations vectorielles sont d'emblée:

$$\alpha \overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'B} = \vec{0}$$

$$\beta \overrightarrow{B'A} - \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{C'A} - \alpha\beta \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$$

en raison de la formule

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

Cette formule est facile à mémoriser en écrivant les 2 lignes

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & A & B & \dots \\ B & C & A & B & C & \dots \end{array}$$

et en visualisant chaque colonne (par exemple $[\frac{B}{C}]$) pour obtenir la fraction correspondante (ici $\frac{A'B}{A'C}$). Le théorème de Menelaüs est en fait valable dans un espace affine de dimension n .

Le théorème de Ceva offre les mêmes avantages que le théorème de Menelaüs: il semble n'être connu que dans le cas du plan. La méthode informatique nous permettra d'obtenir la formulation et la démonstration de ce théorème dans un espace quelconque (de dimension n): nous renvoyons au chapitre 9.

4.1 Division harmonique et Quadrilatère complet

Exercice 4.1.1 (*Division harmonique*)
 Soit $ABCD$ un trapèze convexe. Les côtés non parallèles (AD) et (BC) se coupent en E . On désigne par F le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) . Soient N (resp. M) le point d'intersection de la droite (EF) avec la droite (DC) (resp. (AB)). Montrer que:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}} = -\frac{\overline{FM}}{\overline{FN}}$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D\}$

Les points purs choisis sont A, B, D .

Le point C se trouve sur une droite parallèle à la droite (AB) passant par D , il ne peut donc être dessiné n'importe où dans le plan. Il est donc composé et associé à une formule vectorielle du type $\overrightarrow{DC} = \alpha \overrightarrow{AB}$ où α n'est pas une inconnue.

Points purs
 A, B, D

Déterminons le point composé C . On a le découpage:

$$\vec{0} = -\alpha \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \alpha \overrightarrow{OA} - \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

On déduit la description:

$$\overrightarrow{OC} = -\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\alpha \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, E\}$

Détermination du point E :

Le point E est composé comme intersection de 2 droites.

Comme $E \in (AD)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OE} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\mu_1, \quad 0, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $E \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OE} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OE} = (-\alpha + \alpha\nu_1) \overrightarrow{OA} + (\alpha + \nu_1 - \alpha\nu_1) \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\alpha(-1 + \nu_1), \quad \alpha + \nu_1 - \alpha\nu_1, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} \quad \nu_1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}}{-1+\alpha}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}}{-1+\alpha}$$

Dessin = {A, B, C, D, E, F}

Détermination du point F:

Le point F est composé.

Comme $F \in (AC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OF} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF} = (-\alpha + \mu_1 + \alpha\mu_1) \overrightarrow{OA} + (\alpha - \alpha\mu_1) \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$-\alpha + \mu_1 + \alpha\mu_1, \quad \alpha(1 - \mu_1), \quad 1 - \mu_1$$

Comme $F \in (BD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OF} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1,$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad \nu_1 = \frac{2\alpha - \alpha(1 + \alpha)}{-1 - \alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{1+\alpha}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{1+\alpha}$$

Dessin = {A, B, C, D, E, F, N}

Détermination du point N:

Le point N est composé.

Comme $N \in (DC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC} + \mu_1 \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = (-\alpha + \alpha\mu_1) \overrightarrow{OA} + (\alpha - \alpha\mu_1) \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$-\alpha + \alpha\mu_1, \quad \alpha - \alpha\mu_1, \quad 1$$

Comme $N \in (EF)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1 \overrightarrow{OE} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OF}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\alpha\nu_1(1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha(-1 + \alpha)(1 - \nu_1)\overrightarrow{OB} + (-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1)\overrightarrow{OD}}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\frac{\alpha\nu_1}{-1 + \alpha}, \quad \frac{\alpha(1 - \nu_1)}{1 + \alpha}, \quad \frac{-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad \nu_1 = \frac{(1 - \alpha)}{2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{-\alpha\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{-\alpha\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}}{2}$$

Dessin = $\{A, B, C, D, E, F, N, M\}$

Détermination du point M:

Le point M est composé.

Comme $M \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\mu_1, \quad 1 - \mu_1, \quad 0,$$

Comme $M \in (EF)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM} = \nu_1 \overrightarrow{OE} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OF}$$

En utilisant le calcul précédent relatif à \overrightarrow{ON} , on déduit:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha\nu_1(1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha(-1 + \alpha)(1 - \nu_1)\overrightarrow{OB} + (-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1)\overrightarrow{OD}}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, D

$$\frac{\alpha\nu_1}{-1 + \alpha}, \quad \frac{\alpha(1 - \nu_1)}{1 + \alpha}, \quad \frac{-1 + \alpha - 2\alpha\nu_1}{(-1 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \alpha}{2\alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{EM} . On a :

$$\overrightarrow{EM} = \frac{(-1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + (-1 + \alpha)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}}{2(-1 + \alpha)}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{EN} . On a :

$$\overrightarrow{EN} = \frac{(-\alpha - \alpha^2)\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha^2)\overrightarrow{OB} + 2\alpha\overrightarrow{OD}}{2(-1 + \alpha)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{EN}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{FM} . On a :

$$\overrightarrow{FM} = \frac{(1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OD}}{2(1 + \alpha)}$$

Calculons le vecteur \overrightarrow{FN} . On a :

$$\overrightarrow{FN} = \frac{(-\alpha - \alpha^2)\overrightarrow{OA} + (-\alpha + \alpha^2)\overrightarrow{OB} + 2\alpha\overrightarrow{OD}}{2(1 + \alpha)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{FM} = \frac{-1}{\alpha}\overrightarrow{FN}$$

Exercice 4.1.2 (*Quadrilatère complet*)

Soit ABC un triangle et une droite (Δ) qui coupe les côtés (BC) , (CA) et (BA) respectivement en A_1 , B_1 et C_1 . On désigne par I , J , K les milieux respectifs des segments $[A, A_1]$, $[B, B_1]$, $[C, C_1]$.

Montrer que les points I , J , K sont alignés.

Un quadrilatère complet est la donné d'un triangle et d'une droite coupant les 3 côtés du triangle. Ainsi, dans un quadrilatère complet, les milieux des segments diagonaux sont alignés.

Solution:

La droite (Δ) s'identifie à la droite B_1, C_1 , les points B_1 et C_1 étant placés arbitrairement sur chacune des droites GA et GB .

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont B_1, C_1 .

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB_1} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB_1}$$

Points purs
 A, B, C

$$\vec{0} = \beta \vec{AB} - \vec{AC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} - \vec{OC}_1$$

avec α et β constantes arbitraires.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, A_1\}$

Détermination du point A_1 :

Le point A_1 est composé.

Comme $A_1 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OA}_1 = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \mu_1, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $A_1 \in (B_1C_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\vec{OA}_1 = \nu_1 \vec{OB}_1 + (1 - \nu_1) \vec{OC}_1$$

On déduit:

$$\vec{OA}_1 = (1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\nu_1) \vec{OB} + \alpha\nu_1 \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1, \quad -\beta(-1 + \nu_1), \quad \alpha\nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\beta - \beta\alpha}{\beta - \alpha} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \beta}{\beta - \alpha}$$

On déduit que:

$$\vec{OA}_1 = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

$$\vec{OA}_1 = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, A_1, I, J, K\}$

Les points I, J, K sont composés.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{AI} - \vec{IA}_1 &= -\vec{OA} - \vec{OA}_1 + 2\vec{OI} \\ \vec{0} &= \vec{BJ} - \vec{JB}_1 &= -\vec{OB} - \vec{OB}_1 + 2\vec{OJ} \\ \vec{0} &= \vec{CK} - \vec{KC}_1 &= -\vec{OC} - \vec{OC}_1 + 2\vec{OK} \end{aligned}$$

Points purs
 A, B, C

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \vec{AI} - \vec{IA_1} = \frac{(-\beta + \alpha)\vec{OA} + (-\beta + \beta\alpha)\vec{OB} + (\alpha - \beta\alpha)\vec{OC} + (2\beta - 2\alpha)\vec{OI}}{\beta - \alpha}$$

$$\vec{0} = \vec{BJ} - \vec{JB_1} = (-1 + \alpha)\vec{OA} - \vec{OB} - \alpha\vec{OC} + 2\vec{OJ}$$

$$\vec{0} = \vec{CK} - \vec{KC_1} = (-1 + \beta)\vec{OA} - \beta\vec{OB} - \vec{OC} + 2\vec{OK}$$

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OI} = \frac{(\beta - \alpha)\vec{OA} + (\beta - \beta\alpha)\vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\vec{OC}}{2(\beta - \alpha)}$$

$$\vec{OJ} = \frac{(1-\alpha)\vec{OA} + \vec{OB} + \alpha\vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OK} = \frac{(1-\beta)\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OI} = \frac{(\beta-\alpha)\vec{OA} + (\beta-\beta\alpha)\vec{OB}}{2(\beta-\alpha)}$$

$$+ \frac{(-\alpha+\beta\alpha)\vec{OC}}{2(\beta-\alpha)}$$

$$\vec{OJ} = \frac{(1-\alpha)\vec{OA} + \vec{OB} + \alpha\vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OK} = \frac{(1-\beta)\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{JK} . On a:

$$\vec{JK} = \frac{(-\beta + \alpha)\vec{OA} + (\beta - 1)\vec{OB} + (1 - \alpha)\vec{OC}}{2}$$

Calculons le vecteur \vec{IK} . On a:

$$\vec{IK} = \frac{(-\beta^2 + \beta\alpha)\vec{OA} + (-\beta + \beta^2)\vec{OB} + (\beta - \beta\alpha)\vec{OC}}{2(\beta - \alpha)}$$

On a ainsi

$$\vec{JK} = \frac{\beta - \alpha}{\beta} \vec{IK}$$

4.2 Théorèmes de Menelaüs et de Ceva

Exercice 4.2.1 (Menelaüs dans le plan)

Soit un triangle ABC et une droite (Δ) qui coupe les côtés (BC) , (CA) et (BA) respectivement en A' , B' et C' . Montrer que:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, B', C'\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont B', C' .

On a les découpages successifs:

Points purs
 A, B, C

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha \vec{AC} - \vec{AB}' = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} - \vec{OB}' \\ \vec{0} &= \beta \vec{AB} - \vec{AC}' = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} - \vec{OC}'\end{aligned}$$

avec α et β constantes arbitraires.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned}\vec{OB}' &= (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} & \vec{OB}' &= (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} \\ \vec{OC}' &= (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} & \vec{OC}' &= (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}\end{aligned}$$

Dessin = $\{A, B, C, B', C', A'\}$

Détermination du point A' :

Le point A' est composé.

Comme $A' \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OA}' = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \mu_1, \quad 1 - \mu_1$$

Comme $A' \in (B'C')$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\vec{OA}' = \nu_1 \vec{OB}' + (1 - \nu_1) \vec{OC}'$$

On déduit:

$$\vec{OA}' = (1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\nu_1) \vec{OB} + \alpha\nu_1 \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$1 - \beta + \beta\nu_1 - \alpha\nu_1, \quad -\beta(-1 + \nu_1), \quad \alpha\nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\beta - \beta\alpha}{\beta - \alpha} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \beta}{\beta - \alpha}$$

On déduit que:

$$\vec{OA}' = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha} \qquad \vec{OA}' = \frac{(\beta - \beta\alpha) \vec{OB} + (-\alpha + \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

Calculons le vecteur $\vec{A'B}$. On a:

$$\vec{A'B} = \frac{(-\alpha + \beta\alpha) \vec{OB} + (\alpha - \beta\alpha) \vec{OC}}{\beta - \alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A'C}$. On a:

$$\overrightarrow{A'C} = \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (\beta - \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{\beta - \alpha}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A'B} = \frac{(-1 + \beta)\alpha}{\beta(-1 + \alpha)} \overrightarrow{A'C}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B'C}$. On a:

$$\overrightarrow{B'C} = (-1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B'A}$. On a:

$$\overrightarrow{B'A} = \alpha\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{B'C} = \frac{-1 + \alpha}{\alpha} \overrightarrow{B'A}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C'A}$. On a:

$$\overrightarrow{C'A} = \beta\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C'B}$. On a:

$$\overrightarrow{C'B} = (-1 + \beta)\overrightarrow{OA} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{C'A} = \frac{\beta}{-1 + \beta} \overrightarrow{C'B}$$

On a donc

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1$$

Exercice 4.2.2 (*Théorème de Ceva*)

Soient 3 points A, B, C non-alignés et M un point du plan (ABC) . On suppose que:

les droites (AM) et (BC) sont sécantes en un point A_1 différent de C

les droites (BM) et (CA) sont sécantes en un point B_1 différent de A

les droites (CM) et (AB) sont sécantes en un point C_1 différent de B

Démontrer que:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1$$

Solution:**Dessin** = $\{A, B, C, B_1, C_1\}$ Les points purs choisis sont A, B, C .Les points composés sont B_1, C_1 .

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha \vec{AC} - \vec{AB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC} - \vec{OB}_1 \\ \vec{0} &= \beta \vec{AB} - \vec{AC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB} - \vec{OC}_1\end{aligned}$$

avec α et β constantes arbitraires.

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

Points purs

 A, B, C

$$\vec{OB}_1 = (1 - \alpha) \vec{OA} + \alpha \vec{OC}$$

$$\vec{OC}_1 = (1 - \beta) \vec{OA} + \beta \vec{OB}$$

Dessin = $\{A, B, C, B_1, C_1, M\}$ Détermination du point M:Le point M est composé.Comme $M \in (BB_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OM} = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OB}_1$$

On déduit:

$$\vec{OM} = (1 - \alpha - \mu_1 + \alpha\mu_1) \vec{OA} + \mu_1 \vec{OB} + (\alpha - \alpha\mu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$(-1 + \alpha)(-1 + \mu_1), \quad \mu_1, \quad -\alpha(-1 + \mu_1)$$

Comme $M \in (CC_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\vec{OM} = \nu_1 \vec{OC} + (1 - \nu_1) \vec{OC}_1$$

On déduit:

$$\vec{OM} = (1 - \beta - \nu_1 + \beta\nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\nu_1) \vec{OB} + \nu_1 \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$(-1 + \beta)(-1 + \nu_1), \quad -\beta(-1 + \nu_1), \quad \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-\beta + \beta\alpha}{-1 + \beta\alpha} \quad \nu_1 = \frac{-\alpha + \beta\alpha}{-1 + \beta\alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha)\overrightarrow{OA} + (-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-1 + \beta\alpha}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{(-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha)\overrightarrow{OA}}{-1 + \beta\alpha} \\ &+ \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB}}{-1 + \beta\alpha} \\ &+ \frac{(-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-1 + \beta\alpha} \end{aligned}$$

Dessin = {A, B, C, B₁, C₁, M, A₁}

Détermination du point A₁:

Le point A₁ est composé.

Comme A₁ ∈ (AM), on a, en choisissant l'inconnue μ₁

$$\overrightarrow{OA_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{(-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha - \beta\mu_1 - \alpha\mu_1 + 2\beta\alpha\mu_1)\overrightarrow{OA} - (-\beta + \beta\alpha)(-1 + \mu_1)\overrightarrow{OB} - (-1 + \beta)\alpha(-1 + \mu_1)\overrightarrow{OC}}{-1 + \beta\alpha}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \beta + \alpha - \beta\alpha - \beta\mu_1 - \alpha\mu_1 + 2\beta\alpha\mu_1}{-1 + \beta\alpha}, \quad \frac{-(-\beta + \beta\alpha)(-1 + \mu_1)}{-1 + \beta\alpha}, \quad \frac{-(-1 + \beta)\alpha(-1 + \mu_1)}{-1 + \beta\alpha}$$

Comme A₁ ∈ (BC), on a, en choisissant l'inconnue ν₁

$$\overrightarrow{OA_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1,$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ₁, ν₁ donne

$$\nu_1 = \frac{-\beta + \beta\alpha}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha} \quad \mu_1 = \frac{1 - \beta - \alpha + \beta\alpha}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha} \quad \overrightarrow{OA_1} = \frac{(-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1B}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{(-\alpha + \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (\alpha - \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1C}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1C} = \frac{(\beta - \beta\alpha)\overrightarrow{OB} + (-\beta + \beta\alpha)\overrightarrow{OC}}{-\beta - \alpha + 2\beta\alpha}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{\alpha - \beta\alpha}{\beta(-1 + \alpha)} \overrightarrow{A_1C}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_1C}$. On a:

$$\overrightarrow{B_1C} = (-1 + \alpha)\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_1A}$. On a:

$$\overrightarrow{B_1A} = \alpha\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{B_1C} = \frac{-1 + \alpha}{\alpha} \overrightarrow{B_1A}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C_1A}$. On a:

$$\overrightarrow{C_1A} = \beta\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{C_1B}$. On a:

$$\overrightarrow{C_1B} = (-1 + \beta)\overrightarrow{OA} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{C_1A} = \frac{\beta}{-1 + \beta} \overrightarrow{C_1B}$$

On a ainsi

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}} \frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\alpha(1 - \beta)}{\beta(-1 + \alpha)} \frac{-1 + \alpha}{\alpha} \frac{\beta}{-1 + \beta} = -1$$

Exercice 4.2.3 (*Réciproque du Théorème de Ceva*)

Soient 3 points A_1, B_1, C_1 distincts des sommets d'un triangle ABC et appartenant respectivement aux côtés (BC) , (CA) et (AB) . On suppose que:

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}} \frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1$$

Montrer que les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) sont, soit parallèles, soit concourantes.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, A_1, B_1, C_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont A_1, B_1, C_1 .

Posons $\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} = \gamma_1$ et $\frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}} = \gamma_2$ avec $\gamma_1 \neq 1$ et $\gamma_2 \neq 1$.

On a les découpages successifs:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{A_1B} - \gamma_1 \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{OB} - \gamma_1 \overrightarrow{OC} + (-1 + \gamma_1) \overrightarrow{OA_1} \\ \vec{0} &= -\gamma_2 \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1C} = -\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + (-1 + \gamma_2) \overrightarrow{OB_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{C_1A} + \frac{1}{\gamma_1\gamma_2} \overrightarrow{C_1B} = \frac{\gamma_1\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (-1 - \gamma_1\gamma_2) \overrightarrow{OC_1}}{\gamma_1\gamma_2} \end{aligned}$$

Points purs
 A, B, C

On déduit les descriptions des points composés:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{-\overrightarrow{OB} + \gamma_1 \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{-\overrightarrow{OB} + \gamma_1 \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\gamma_2 \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\gamma_2 \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\gamma_1\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1 + \gamma_1\gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\gamma_1\gamma_2 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1 + \gamma_1\gamma_2}$$

avec $\gamma_1\gamma_2 \neq -1$ car $A \neq B$ est distinct.

Nous posons $M = (AA_1) \cap (BB_1)$ et $N = (AA_1) \cap (CC_1)$.

Dessin = $\{A, B, C, A_1, B_1, C_1, M\}$

Détermination du point M:

Le point M est composé.

Comme $M \in (AA_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(-\mu_1 + \gamma_1\mu_1) \overrightarrow{OA} + (-1 + \mu_1) \overrightarrow{OB} + (\gamma_1 - \gamma_1\mu_1) \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad \frac{-1 + \mu_1}{-1 + \gamma_1}, \quad \frac{\gamma_1(1 - \mu_1)}{-1 + \gamma_1}$$

Comme $M \in (BB_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_2\nu_1) \overrightarrow{OA} + (-\nu_1 + \gamma_2\nu_1) \overrightarrow{OB} + (-1 + \nu_1) \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{\gamma_2(1 - \nu_1)}{-1 + \gamma_2}, \quad \nu_1, \quad \frac{-1 + \nu_1}{-1 + \gamma_2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\gamma_1\gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2} \quad \nu_1 = \frac{1}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

Dessin = $\{A, B, C, A_1, B_1, C_1, M, N\}$

Détermination du point N:

Le point N est composé.

Comme $N \in (AA_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON} = \mu_1\overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1)\overrightarrow{OA_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{(-\mu_1 + \gamma_1\mu_1)\overrightarrow{OA} + (-1 + \mu_1)\overrightarrow{OB} + (\gamma_1 - \gamma_1\mu_1)\overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_1}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\mu_1, \quad \frac{-1 + \mu_1}{-1 + \gamma_1}, \quad \frac{\gamma_1(1 - \mu_1)}{-1 + \gamma_1}$$

Comme $N \in (CC_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1\overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1)\overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\nu_1)\overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1)\overrightarrow{OB} + \nu_1(1 + \gamma_1\gamma_2)\overrightarrow{OC}}{1 + \gamma_1\gamma_2}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{\gamma_1\gamma_2(1 - \nu_1)}{1 + \gamma_1\gamma_2}, \quad \frac{1 - \nu_1}{1 + \gamma_1\gamma_2}, \quad \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\gamma_1\gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2} \quad \nu_1 = \frac{-1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

On déduit que:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\gamma_1\gamma_2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \gamma_1\overrightarrow{OC}}{1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}$$

En résumé, lorsque $1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 \neq 0$, on a $M = N$, donc les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) sont concourantes.

Supposons maintenant que $1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = 0$ donc $\gamma_1 = \frac{1}{(1-\gamma_2)}$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{-\gamma_2\overrightarrow{OA} + (-1 + \gamma_2)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{\gamma_2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BB_1}$. On a:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{\gamma_2\overrightarrow{OA} + (1 - \gamma_2)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{-1 + \gamma_2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2} \overrightarrow{BB_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{-\gamma_2\overrightarrow{OA} - (1 - \gamma_2)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{\gamma_2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{CC_1}$. On a:

$$\overrightarrow{CC_1} = \gamma_2\overrightarrow{OA} + (1 - \gamma_2)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{-1}{\gamma_2} \overrightarrow{CC_1}$$

et $\gamma_2 \neq 0$ car $B_1 \neq C$.

En résumé, lorsque $1 - \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = 0$, les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) sont parallèles.

4.3 Une formule originale

Exercice 4.3.1

Soit ABC un triangle et I un point du plan n'appartenant à aucune des droites (AB) , (AC) , (BC) . Les droites qui joignent les sommets A, B, C du triangle au point I coupent les côtés opposés aux points A', B', C' respectivement.

Démontrer la relation

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

Solution:

Dessin = {A, B, C, B', C'}

Les points purs choisis sont A, B, C.

Les points composés sont B', C'.

On a les découpages successifs:

$$\vec{0} = \vec{B'A} - \alpha \vec{B'C} = \vec{OA} - \alpha \vec{OC} + (-1 + \alpha) \vec{OB'}$$

$$\vec{0} = \vec{C'A} - \beta \vec{C'B} = \vec{OA} - \beta \vec{OB} + (-1 + \beta) \vec{OC'}$$

Points purs
A, B, C

On déduit les descriptions des points composés:

$$\vec{OB'} = \frac{-\vec{OA} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha}$$

$$\vec{OB'} = \frac{-\vec{OA} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha}$$

$$\vec{OC'} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB}}{-1 + \beta}$$

$$\vec{OC'} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB}}{-1 + \beta}$$

Dessin = {A, B, C, B', C', I}

Détermination du point I:

Le point I est composé.

Comme $I \in (BB')$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OI} = \mu_1 \vec{OB} + (1 - \mu_1) \vec{OB'}$$

On déduit:

$$\vec{OI} = \frac{(-1 + \mu_1) \vec{OA} + (-\mu_1 + \alpha \mu_1) \vec{OB} + (\alpha - \alpha \mu_1) \vec{OC}}{-1 + \alpha}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \mu_1}{-1 + \alpha}, \quad \mu_1, \quad \frac{-\alpha(-1 + \mu_1)}{-1 + \alpha}$$

Comme $I \in (CC')$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OI} = \nu_1 \vec{OC} + (1 - \nu_1) \vec{OC'}$$

On déduit:

$$\vec{OI} = \frac{(-1 + \nu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta \nu_1) \vec{OB} + (-\nu_1 + \beta \nu_1) \vec{OC}}{-1 + \beta}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \nu_1}{-1 + \beta}, \quad \frac{-\beta(-1 + \nu_1)}{-1 + \beta}, \quad \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\mu_1 = \frac{\beta}{-1 + \alpha + \beta} \quad \nu_1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha + \beta}$$

On déduit que:

$$\vec{OI} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

$$\vec{OI} = \frac{-\vec{OA} + \beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

(l'existence du point I implique que $\alpha + \beta \neq 1$)

Dessin = $\{A, B, C, B', C', I, A'\}$

Détermination du point A' :

Le point A' est composé.

Comme $A' \in (AI)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OA'} = \mu_1 \vec{OA} + (1 - \mu_1) \vec{OI}$$

On déduit:

$$\vec{OA'} = \frac{(-1 + \alpha\mu_1 + \beta\mu_1) \vec{OA} + (\beta - \beta\mu_1) \vec{OB} + (\alpha - \alpha\mu_1) \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$\frac{-1 + \alpha\mu_1 + \beta\mu_1}{-1 + \alpha + \beta}, \quad \frac{-\beta(-1 + \mu_1)}{-1 + \alpha + \beta}, \quad \frac{-\alpha(-1 + \mu_1)}{-1 + \alpha + \beta}$$

Comme $A' \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OA'} = \nu_1 \vec{OB} + (1 - \nu_1) \vec{OC}$$

On déduit:

$$\vec{OA'} = \nu_1 \vec{OB} + (1 - \nu_1) \vec{OC}$$

ce qui donne pour coefficients successifs dans A, B, C

$$0, \quad \nu_1, \quad 1 - \nu_1$$

La résolution du système linéaire d'inconnues μ_1, ν_1 donne

$$\nu_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad \mu_1 = \frac{-1}{-\alpha - \beta}$$

On déduit que:

$$\vec{OA'} = \frac{\beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{\alpha + \beta}$$

$$\vec{OA'} = \frac{\beta \vec{OB} + \alpha \vec{OC}}{\alpha + \beta}$$

Calculons le vecteur \vec{IA} . On a:

$$\vec{IA} = \frac{(\alpha + \beta) \vec{OA} - \beta \vec{OB} - \alpha \vec{OC}}{-1 + \alpha + \beta}$$

Calculons le vecteur $\vec{IA'}$. On a:

$$\vec{IA'} = \frac{(\alpha + \beta) \vec{OA} - \beta \vec{OB} - \alpha \vec{OC}}{(-1 + \alpha + \beta)(\alpha + \beta)}$$

On a ainsi

$$\vec{IA} = (\alpha + \beta) \vec{IA'}$$

qui est la relation demandée.